

Assimilation variationnelle de données pour les modèles emboîtés

Ehouarn Simon, Laurent Debreu, Eric Blayo

Laboratoire de Modélisation et Calcul

51 rue des mathématiques

BP 53

38041 Grenoble Cedex 9

ehouarn.simon@imag.fr, laurent.debreu@imag.fr, eric.blayo@imag.fr .

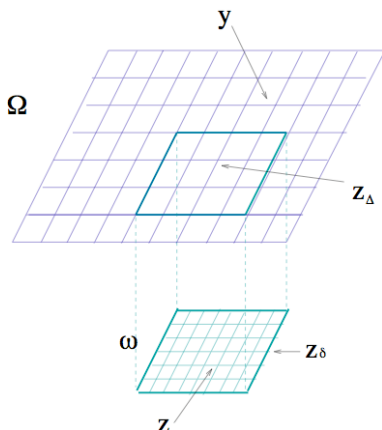
1. Résumé

Ce poster présente une approche de l'assimilation de données variationnelle pour les modèles multi-grilles. Ceux-ci permettent un accroissement local de la résolution, dans les zones où cela semble nécessaire, via l'intégration d'un même modèle sur une hiérarchie de grilles. Dans le cas d'interactions "one way", les conditions aux frontières pour la grille fine proviennent, par interpolation, de la solution obtenue sur la grille à faible résolution. Dans le cas d'interactions "two way", une rétroaction de la grille fine vers la grille grossière est ajoutée.

Pour le cas général d'une grille haute résolution emboîtée localement dans une autre à plus faible résolution, nous posons les équations du système adjoint dans les deux cas d'interactions "one way" et "two way". Nous montrons ainsi que la formulation adjointe ajoute de nouvelles interactions entre les grilles, dans le sens opposé de celles existant dans la formulation directe. En particulier, dans le cas "one way", la formulation adjointe crée une rétroaction de la grille fine vers la grille grossière.

2. Etude théorique

L'étude théorique de l'assimilation de données a été réalisée sur le problème de deux grilles emboîtées, le but étant d'obtenir pour ce cas générique le système d'optimalité, à savoir les équations des modèles direct et adjoint ainsi que les gradients de la fonction coût à minimiser. Différents termes de contrôle ont été envisagés dans le but d'obtenir la meilleure convergence possible de l'algorithme d'assimilation de données.



- y est le vecteur d'état sur Ω .
- z est le vecteur d'état sur ω .
- z_δ correspond aux conditions aux limites du modèle haute résolution
- z_Δ correspond, dans le cas d'interactions "two way", à la rétroaction du modèle haute résolution sur le modèle grossier. Il est défini localement sur la zone de Ω correspondant à ω .

Il est important de remarquer que le raffinement de maillages génère une hiérarchie de grilles homogènes. La fonction coût à minimiser est de la forme suivante :

$$J = J^b + J^{obs}$$

avec :

$$J^b = \alpha_1 \|\mathbf{y}_b - \mathbf{y}_0\|_\Omega^2 + \beta_1 \|\mathbf{z}_b - \mathbf{z}_0\|_\omega^2$$

$$J^{obs} = \alpha_2 \int_0^T \|\mathbf{y} - \mathbf{y}_{obs}\|_\Omega^2 + \beta_2 \int_0^T \|\mathbf{z} - \mathbf{z}_{obs}\|_\omega^2$$

Les variables de contrôle sont les conditions initiales de chacune des grilles.

Dans le cas d'interactions "one way", la solution du modèle grossier procure les conditions aux limites du modèle local à haute résolution. Dans le cas d'interactions "two way", un feedback, du modèle haute résolution vers le modèle grossier, est ajouté. Les équations du système emboîté sont les suivantes :

One way

Two way

Domaine Ω

Domaine ω

Domaine Ω

Domaine ω

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial t} = F(\mathbf{y}) \\ \mathbf{y}(x, 0) = \mathbf{y}_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial t} = F(\mathbf{z}, \mathbf{z}_\delta) \\ \mathbf{z}(x, 0) = \mathbf{z}_0 \\ \mathbf{z}_\delta = I\mathbf{y} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial t} = F(\mathbf{y}, \mathbf{z}_\Delta) \\ \mathbf{y}(x, 0) = \mathbf{y}_0 \\ \mathbf{z}_\Delta = G^*\mathbf{z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial t} = F(\mathbf{z}, \mathbf{z}_\delta) \\ \mathbf{z}(x, 0) = \mathbf{z}_0 \\ \mathbf{z}_\delta = I\mathbf{y} \end{cases}$$

I est un opérateur, supposé linéaire, de Ω vers ω (interpolation). G^* est un opérateur, supposé lui aussi linéaire, de ω vers Ω (restriction).

Le gradient de J^b étant trivial, seul celui de J^{obs} est étudié par la suite.

Dans le cas d'interactions "one way", nous obtenons les équations suivantes pour le modèle adjoint:

Domaine Ω

Domaine ω

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial t} + \left[\frac{\partial F}{\partial \mathbf{y}} \right]^* \cdot \mathbf{p} + I^* \left[\frac{\partial F}{\partial \mathbf{z}_\delta} \right]^* \cdot \mathbf{q} = \nabla_{\mathbf{y}} J^{obs} \\ \mathbf{p}(T) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + \left[\frac{\partial F}{\partial \mathbf{z}} \right]^* \cdot \mathbf{q} = \nabla_{\mathbf{z}} J^{obs} \\ \mathbf{q}(T) = 0 \end{cases}$$

$$\nabla_{\mathbf{y}_0} J^{obs} = -\mathbf{p}(0)$$

$$\nabla_{\mathbf{z}_0} J^{obs} = -\mathbf{q}(0)$$

On observe ainsi une rétroaction du modèle adjoint haute résolution vers celui basse résolution, à l'opposé de celle présente dans le modèle direct.

Pour le "two way", les équations sont:

Domaine Ω

Domaine ω

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial t} + \left[\frac{\partial F}{\partial \mathbf{y}} \right]^* \cdot \mathbf{p} + I^* \left[\frac{\partial F}{\partial \mathbf{z}_\delta} \right]^* \cdot \mathbf{q} = \nabla_{\mathbf{y}} J^{obs} \\ \mathbf{p}(T) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + \left[\frac{\partial F}{\partial \mathbf{z}} \right]^* \cdot \mathbf{q} + G \left[\frac{\partial F}{\partial \mathbf{z}_\Delta} \right]^* \cdot \mathbf{p} = \nabla_{\mathbf{z}} J^{obs} \\ \mathbf{q}(T) = 0 \end{cases}$$

$$\nabla_{\mathbf{y}_0} J^{obs} = -\mathbf{p}(0)$$

$$\nabla_{\mathbf{z}_0} J^{obs} = -\mathbf{q}(0)$$

3. Résultats numériques

3.1. EXPERIENCES

Les tests numériques ont été réalisés dans la configuration *SOLITON* du modèle **ROMS-AGRIF**, développé par l'IRD et UCLA. Il s'agit d'une onde de Rossby équatoriale, parcourant le domaine d'Est en Ouest, dans un modèle shallow water à fond plat.

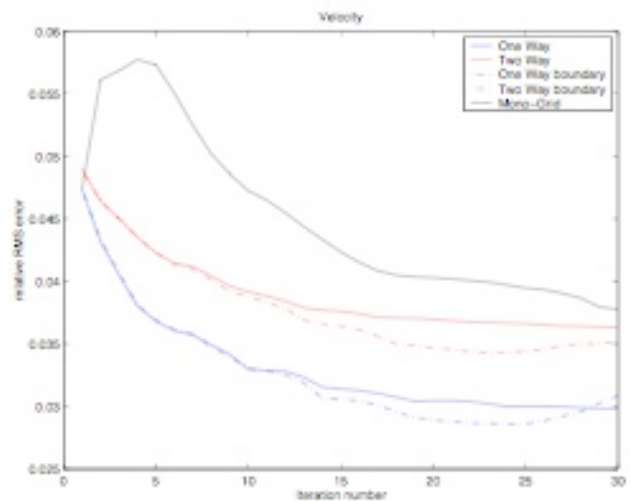
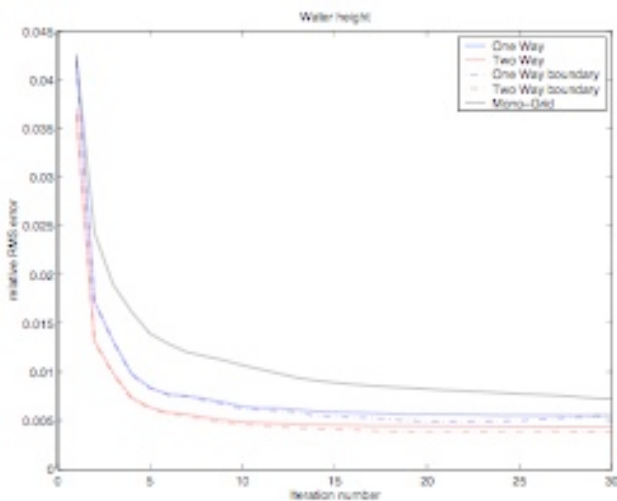
L'assimilation de données a été réalisée dans le cadre d'expériences jumelles. Les observations (la hauteur d'eau) sont présentes uniquement sur la grille fine. Notre but est de comparer les performances de l'assimilation de données dans les modèles emboîtés avec celles d'une assimilation mono-grille, pour laquelle seraient contrôlées la condition initiale et les conditions aux limites.

La fonction coût utilisée est la suivante:

$$J = \alpha_1 \|\mathbf{y}_b - \mathbf{y}_0\|_{2,\Omega}^2 + \beta_1 \|\mathbf{z}_b - \mathbf{z}_0\|_{2,\omega}^2 + \beta_2 \int_0^T \|\mathbf{z} - \mathbf{z}_{obs}\|_{2,\omega}^2$$

3.2. RESULTATS

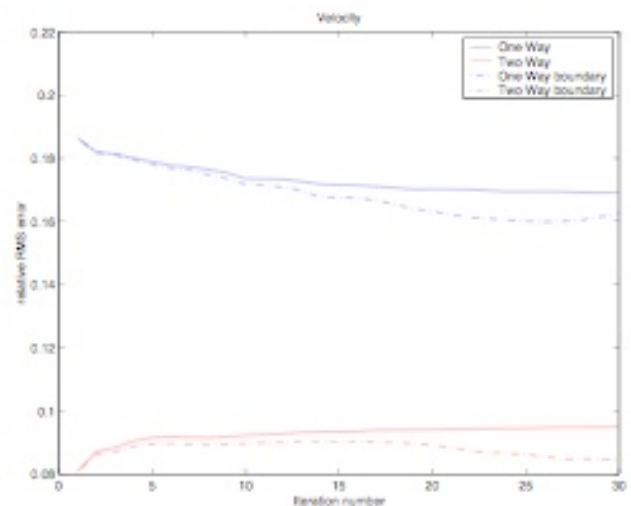
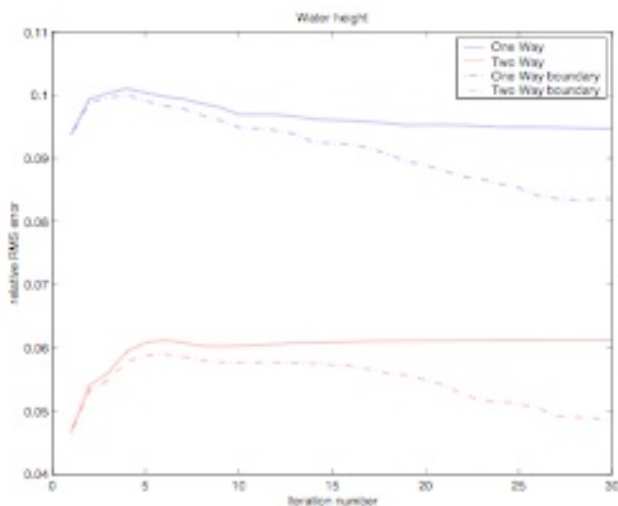
La figure suivante montre l'erreur RMS relative calculée sur la grille fine, pour la hauteur d'eau (variable observée) à gauche, et pour la vitesse (non observée) à droite.



Erreur RMS relative, grille fine, variable observée .
De haut en bas : - formulation mono-grille
- formulation 'one way'
- fomrulation 'two way'

Erreur RMS relative, grille fine,, variable non observée.
De haut en bas : - formulation mono-grille
- formulation 'two way'
- formulation 'one way'

Dans le contexte de l'assimilation de données à haute résolution, l'utilisation de modèles emboîtés permet d'accroître la vitesse de convergence de l'assimilation de données. L'ajout d'une variable de contrôle au niveau des conditions aux limites (courbes en pointillés, formulation présentée sur le poster) permet d'accélérer encore plus cette convergence. La remontée de l'erreur dans ce cas s'explique par l'utilisation d'un terme d'ébauche simpliste (matrices de covariance d'erreur d'ébauche diagonales monovariées); terme d'ébauche sur la grille grossière devenu prédominant en fin de minimisation. Ceci est confirmé par la figure suivante représentant, pour le cas des modèles emboîtés, l'erreur RMS relative sur le domaine grossier privé de la zone correspondant au domaine fin.



Erreur RMS relative, grille grossière, variable observée .
De haut en bas : - formulation 'one way'
- formulation 'two way'

Erreur RMS relative, grille fine,, variable non observée.
De haut en bas : - formulation 'one way'
- formulation 'two way'

Cette erreur diminue fortement lors des dernières itérations, sous l'impulsion du terme dominant dans la fonction coût : l'ébauche sur la grille grossière.

Références

- A.D Fox and S.J Maskell, Two-way interactive nesting of primitive equation ocean models with topography, *Journal of Physical Oceanography*, **25** (1995) 2977-2996
- M.A. Spall and W.R. Holland, A nested primitive equation model for ocean applications, *Journal of Physical Oceanography*, **21** (1991) 20063-20086
- E. Blayo and L. Debreu, Adaptive mesh refinement for finite difference ocean models :first experiments, *Journal of Physical Oceanography*, **29** (1999) 1239-1250
- Debreu, L., Blayo, E., Simon, E., De Visme, Y. : 4D variational data assimilation for locally nested models, *Physica D* (2005), Proceeding
- S. Ta'asan, One shot methods for optimal control of distributed parameters systems I : finite dimensional control, *ICASE Report*, No. 91-2 (1991)
- S.G. Nash, A multigrid Approach to Discretized Optimization Problems, *Journal of Optimisation Methods and Software*, **14** (2000) 99-116
- R.M. Lewis and S.G. Nash, Model Problems for the Multigrid Optimization of systems governed by differential equations, *SIA Journal on Scientific Computing*, **26-6** (2005) 1811-1837
- F.-X. Le Dimet and O. Talagrand, Variational algorithms for analysis and assimilation of meteorological observations : theoretical aspects, *Tellus*, **38A** (1986) 97-110
- J.C. Gilbert and C. Lemaréchal, Some numerical experiments with variable storage quasi-Newton algorithms, *Mathematical Programming*, **B25**, (1989) 407-435

TABLE DES MATIERES

Assimilation variationnelle de données pour les modèles emboîtés	1
1. Résumé.....	1
2. Etude théorique.....	1
3. Résultats numériques	2