

Master 2 Recherche de mathématiques appliquées de Grenoble, Université Joseph Fourier

# **Une méthode mixte d'assimilation de données.**

25 juin 2004

**Rapport de stage d'Ehouarn SIMON**

Sous la direction d'Eric Blayo et de Céline Robert



# Table des matières

<b>1</b>	<b>L'assimilation de données</b>	<b>2</b>
1.1	Notations . . . . .	2
1.2	Approche stochastique . . . . .	3
1.2.1	Le filtre de Kalman . . . . .	3
1.2.2	Le filtre de Kalman étendu . . . . .	4
1.2.3	Implémentation réaliste: le filtre SEEK . . . . .	5
1.3	Approche variationnelle . . . . .	6
1.3.1	Idée générale . . . . .	7
1.3.2	4D-var . . . . .	8
1.3.3	4D-var incrémental . . . . .	9
1.3.4	4D-var réduit . . . . .	10
1.4	Réduction d'ordre: l'analyse EOF . . . . .	10
<b>2</b>	<b>Hybridation des deux approches</b>	<b>12</b>
2.1	Motivations . . . . .	12
2.2	Algorithmique de l'hybridation . . . . .	13
<b>3</b>	<b>Expérimentation dans le cas d'un modèle linéaire</b>	<b>16</b>
3.1	Le modèle . . . . .	16
3.2	Discrétisation . . . . .	16
3.3	Analyse EOF . . . . .	18
3.4	Premiers résultats sur une fenêtre d'assimilation . . . . .	21
3.5	Assimilation de plusieurs fenêtres consécutives . . . . .	25
3.5.1	Comportement de l'hybridation . . . . .	25
3.5.2	Etude de la propagation des EOFs . . . . .	26
<b>4</b>	<b>Expérimentation dans le cas d'un modèle non-linéaire</b>	<b>29</b>
4.1	Le modèle . . . . .	29
4.2	Discrétisation . . . . .	30
4.3	Analyse EOF . . . . .	30
4.4	Premiers résultats sur une fenêtre d'assimilation . . . . .	33
4.5	Assimilation de plusieurs fenêtres consécutives . . . . .	36
4.5.1	Comportement de l'hybridation . . . . .	36
4.5.2	Comportement des EOFs lors de l'assimilation . . . . .	36
<b>A</b>	<b>Calcul de la dérivée au sens de Gâteaux de la fonction coût <math>J</math> du 4D-var incrémental</b>	<b>41</b>



# Remerciements

Je remercie bien évidemment mon cher tuteur de stage Eric Blayo pour les conseils et les diverses explications qu'il a pu me donner tout au long de ces trois mois et demi.

Je remercie aussi particulièrement Céline Robert pour avoir réussi à me supporter moi et mes innombrables questions quotidiennes.

Et enfin, je remercie les thésards du LMC, et particulièrement ceux de la salle 3 pour l'accueil qui m'a été fait et pour la bonne ambiance qu'ils ont su entretenir tout au long de ce stage.



## Chapitre 1

# L'assimilation de données

L'assimilation de données est l'ensemble des techniques qui permettent de combiner, de la meilleure des façons possibles, l'information mathématique contenue dans les équations et l'information physique provenant des observations en vue de reconstituer l'état d'un système. De telles méthodes sont notamment introduites dans des domaines tels que l'océanographie ou la météorologie. En effet, pour les fluides géophysiques, chaque situation est unique; il est donc nécessaire d'introduire des données d'observation dans la modélisation. Ainsi que ce soit dans le but d'analyser historiquement un phénomène climatique ou océanique dans l'espoir d'en étudier les comportements particuliers, ou bien que ce soit dans le but de faire de la prévision (recherche de la meilleure condition initiale pour le modèle), des méthodes d'assimilation de données sont employées.

Ces méthodes se classent suivant deux catégories: l'approche stochastique basée sur la théorie de l'estimation statistique optimale (filtre de Kalman,..) et l'approche variationnelle basée sur la théorie du contrôle optimal.

### 1.1 Notations

Nous allons par la suite définir les différents intervenants présents dans l'assimilation de données. Le formalisme des notations correspond en fait à celui introduit par IDE *et al.* en 1997. Ainsi, pour être succinct, les minuscules italiques représenteront des valeurs scalaires, les majuscules  $M, H, ..$  désigneront des opérateurs non linéaires. Inversement des minuscules "grasses", par exemple  $\mathbf{y}$ , seront utilisées pour représenter des vecteurs tandis que les majuscules représenteront des matrices ou des opérateurs linéaires.

Certaines variables seront notées avec des exposants  $a, f, b, g$ : l'exposant  $a$  permet de représenter l'état analysé (produit par l'assimilation), le  $f$  représentera les différentes prévisions (forecast), le  $b$  l'ébauche (premier itéré) et enfin le  $g$  représentera l'état en cours d'analyse.

#### Le vecteur d'état $\mathbf{x}$

Ce vecteur représente l'ensemble des variables du modèle. Ainsi  $\mathbf{x}_i$  correspond à l'état au temps  $t_i$ . Il est obtenu par propagation via le modèle  $M$  depuis l'état initial.

### Le vecteur d'observation $\mathbf{y}$

Ce vecteur représente les observations disponibles pendant l'intervalle de temps correspondant au cycle d'assimilation.

### L'opérateur d'observation $H$

Cet opérateur permet de ramener dans l'espace des observations le vecteur d'état  $\mathbf{x}$ . En effet les observations ne sont pas nécessairement localisées sur les différents points de grille du modèle ou ne sont pas de même nature que les variables du modèle.

Dans le cas où  $H$  est non-linéaire, il est possible de le linéariser. On note alors  $\mathbf{H}$  son linéarisé. Il est obtenu par :

$$\mathbf{H} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}_0) \quad (1.1)$$

### Le modèle $M$

Le modèle décrit l'évolution du fluide. Il s'écrit sous la forme d'un système différentiel non linéaire,  $M$  représente alors le modèle discret.

De même que pour l'opérateur d'observation, le modèle  $M$  peut être linéarisé via la formule:

$$\mathbf{M} = \frac{\partial M}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}_0) \quad (1.2)$$

## 1.2 Approche stochastique

Nous allons présenter dans cette partie les méthodes liées à l'approche statistique de l'assimilation de données. Celles-ci reposent essentiellement sur le filtre de Kalman, qui est un filtre optimal pour des problèmes linéaires. Une opération de filtrage est alors réalisée: seules les observations passées et présentes sont prises en compte pour l'estimation de l'état le plus probable du système.

### 1.2.1 Le filtre de Kalman

Le principe du filtre de Kalman repose sur la recherche du B.L.U.E. (Best Linear Unbiased Estimator). Il s'agit d'ajuster l'état du modèle afin qu'il coïncide le mieux possible avec les observations présentes. Celles-ci sont disponibles à divers instants  $t_k$ ,  $k$  permettant ainsi par la suite de repérer au niveau de quelle observation se situe l'algorithme. L'assimilation de données via le filtre de Kalman se déroule alors en deux phases: une phase d'analyse et une de prévision. L'étape de prévision permet de fournir, comme son nom l'indique, une prévision de l'état courant du système. Elle va nécessiter l'emploi du modèle: l'état courant va être obtenu après intégration des équations du modèle depuis l'état analysé du système précédent (1.3). Cette phase va fournir la matrice de covariance des erreurs de prévision,  $\mathbf{P}^f$ , correspondant à la propagation de l'erreur d'analyse précédente via le modèle auquel on ajoute une estimation de l'erreur de modèle,  $\mathbf{Q}$  (1.3). Le modèle  $\mathbf{M}$  ainsi que l'opérateur d'observation  $\mathbf{H}$  sont, dans ce cas de figure, supposés linéaires.

L'étape d'analyse va réaliser une estimation de l'état du système en corrigeant l'état courant à partir des écarts aux observations, et va fournir la matrice de covariance des erreurs d'analyse,



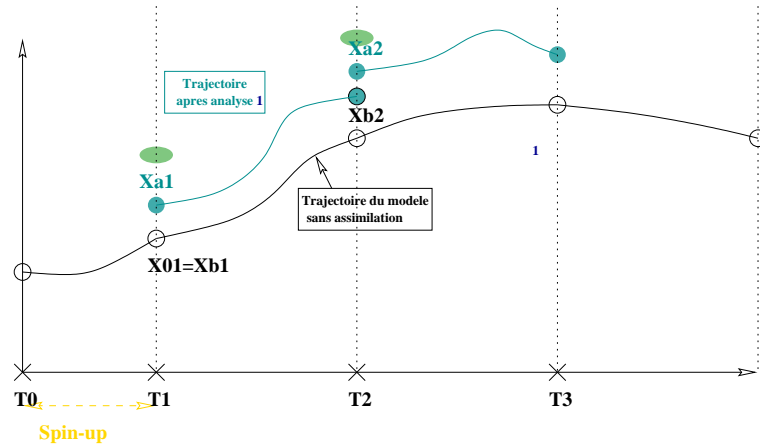


FIG. 1.1 – Principe du filtrage en assimilation de données

$\mathbf{P}^a$ . Cela va nécessiter la connaissance de la matrice de covariance de l'erreur d'observation,  $\mathbf{R}$ , regroupant les erreurs de mesure et de représentativité par la grille spatio-temporelle du modèle.

D'où l'algorithme du filtre de Kalman :

### Prévision

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{k+1}^f &= \mathbf{M}_{k,k+1} \mathbf{x}_k^a \\ \mathbf{P}_{k+1}^f &= \mathbf{M}_{k,k+1} \mathbf{P}_k^a \mathbf{M}_{k,k+1}^T + \mathbf{Q}_k \end{aligned} \quad (1.3)$$

### Analyse

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{k+1} &= \mathbf{P}_{k+1}^f \mathbf{H}_{k+1}^T (\mathbf{H}_{k+1} \mathbf{P}_{k+1}^f \mathbf{H}_{k+1}^T + \mathbf{R}_{k+1})^{-1} \\ \mathbf{x}_{k+1}^a &= \mathbf{x}_{k+1}^f + \mathbf{K}_{k+1} (\mathbf{y}_{k+1} - \mathbf{H}_{k+1} \mathbf{x}_{k+1}^f) \\ \mathbf{P}_{k+1}^a &= (\mathbf{I} - \mathbf{K}_{k+1} \mathbf{H}_{k+1}) \mathbf{P}_{k+1}^f \end{aligned} \quad (1.4)$$

où  $\mathbf{K}$  est appelée la matrice de gain de l'analyse statistique.

Le principe de l'assimilation via un filtre de Kalman est représenté figure 1.1

### 1.2.2 Le filtre de Kalman étendu

Dans la pratique, le modèle dynamique  $M$  n'est pas linéaire, de même que l'opérateur d'observation  $H$ . Dès lors, on généralise l'algorithme du filtre de Kalman en faisant intervenir le modèle linéaire tangent  $\mathbf{M}$  ainsi que le linéaire tangent  $\mathbf{H}$  de l'opérateur d'observation. On obtient ainsi  $\mathbf{M}$  et  $\mathbf{H}$  par :

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{k,k+1} &= \frac{\partial M_{k,k+1}}{\partial \mathbf{x}} (\mathbf{x}_{k+1}^f) \\ \mathbf{H}_{k+1} &= \frac{\partial H_{k+1}}{\partial \mathbf{x}} (\mathbf{x}_{k+1}^f) \end{aligned} \quad (1.5)$$

Le vecteur d'état analysé  $\mathbf{x}^a$  sera alors propagé par le modèle non linéaire, tandis que la matrice de covariance d'erreur d'analyse  $\mathbf{P}^a$  le sera par les différents modèles linéaires tangents. On obtient alors le système suivant :

**Prévision**

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_{k+1}^f &= M_{k,k+1} \mathbf{x}_k^a \\ \mathbf{P}_{k+1}^f &= M_{k,k+1} \mathbf{P}_k^a M_{k,k+1}^T + \mathbf{Q}_k\end{aligned}\quad (1.6)$$

**Analyse**

$$\begin{aligned}\mathbf{K}_{k+1} &= \mathbf{P}_{k+1}^f \mathbf{H}_{k+1}^T (\mathbf{H}_{k+1} \mathbf{P}_{k+1}^f \mathbf{H}_{k+1}^T + \mathbf{R}_{k+1})^{-1} \\ \mathbf{x}_{k+1}^a &= \mathbf{x}_{k+1}^f + \mathbf{K}_{k+1} (\mathbf{y}_{k+1} - \mathbf{H}_{k+1} \mathbf{x}_{k+1}^f) \\ \mathbf{P}_{k+1}^a &= (\mathbf{I} - \mathbf{K}_{k+1} \mathbf{H}_{k+1}) \mathbf{P}_{k+1}^f\end{aligned}\quad (1.7)$$

On n'obtient plus alors la solution optimale mais une solution approchée.

**1.2.3 Implémentation réaliste: le filtre SEEK**

Outre les problèmes liés à la non optimalité du filtre de Kalman étendu et à la méconnaissance des paramètres concernant les matrices  $\mathbf{P}$ ,  $\mathbf{Q}$  et  $\mathbf{R}$  qui peuvent entraîner une certaine inefficacité du filtre, le problème lié à la taille du vecteur d'état pour des modèles réalistes (de l'ordre de  $10^6$ - $10^7$ ) rend impossible son implémentation complète.

D'où l'idée d'approcher l'espace complet des covariance d'erreurs par un sous-espace de rang réduit. Ainsi, à l'instant initial, les matrices de covariance d'erreurs vont être approximées par des matrices de rang réduit: la structure de l'espace réduit va être déterminée par le choix d'un nombre restreint de vecteurs décrivant les modes dominants de variabilité du système. Le choix de ces vecteurs se fera généralement via une analyse EOF (Empirical Orthogonal Functions), ou analyse en composantes principales, d'une trajectoire précédente du modèle. Ce rang réduit sera alors conservé tout au long de la phase d'assimilation.

La réduction d'ordre à l'état initial va se réaliser de la manière suivante. Même si la matrice de covariance d'erreur débauche  $\mathbf{P}_0^f$  est méconnue, celle-ci est symétrique réelle, donc orthodagonalisable. En théorie, il est donc possible d'obtenir une factorisation de la forme

$$\mathbf{P}_0^f = \mathbf{N} \mathbf{\Lambda} \mathbf{N}^T \quad (1.8)$$

avec  $\mathbf{\Lambda}$  une matrice diagonale et  $\mathbf{N}$  une matrice orthogonale. Par ailleurs, il est possible d'obtenir une assez bonne approximation de cette matrice  $\mathbf{P}_0^f$  par

$$\mathbf{P}_0^f \approx (\mathbf{X} - \bar{\mathbf{X}})^T (\mathbf{X} - \bar{\mathbf{X}}) \quad (1.9)$$

où  $\mathbf{X}$  contient une série temporelle d'états du modèle, et où  $\bar{\mathbf{X}}$  correspond à leur moyenne. Il ne reste plus qu'à diagonaliser cette matrice et choisir judicieusement le bon nombre de vecteurs propres (analyse EOF) pour obtenir l'approximation

$$\mathbf{P}_0^f = \mathbf{N}_{red} \mathbf{\Lambda}_{red} \mathbf{N}_{red}^T \quad (1.10)$$

avec  $\mathbf{\Lambda}_{red}$  diagonale dont la taille correspond au nombre de vecteurs propres conservés. En posant

$$\mathbf{S}_0^f = \mathbf{N}_{red} \mathbf{\Lambda}_{red}^{1/2} \quad (1.11)$$

$\mathbf{P}_0^f$  se réécrit:

$$\mathbf{P}_0^f = \mathbf{S}_0^f \mathbf{S}_0^{fT} \quad (1.12)$$

L'utilisation de cette matrice  $\mathbf{S}_0^f$  lors de la première phase d'analyse, puis l'emploi des différents itérés durant la période d'assimilation vont rendre possible d'un point de vue technique (espace mémoire,..) l'emploi d'une telle méthode dans le contexte de l'océanographie opérationnelle.

On définit alors  $\mathbf{S}_{k+1}^{f-}$  correspondant à l'évolution suivant le modèle des modes d'erreur d'analyse. Afin de conserver le caractère centré de ces modes,  $\mathbf{S}_{k+1}^{f-}$  est calculée de la manière suivante:

$$[\mathbf{S}_{k+1}^{f-}]_i = M(\mathbf{x}_k^a + [\mathbf{S}_{k+1}^a]_i) - M(\mathbf{x}_k^a) \quad (1.13)$$

$[\mathbf{S}_{k+1}^{f-}]_i$  correspondant à la  $i^{eme}$  colonne de la matrice  $\mathbf{S}_{k+1}^{f-}$ . Ce qui revient à utiliser le modèle linéaire tangent  $\mathbf{M}$  pour la propagation. Ainsi l'expression précédente donne

$$[\mathbf{S}_{k+1}^{f-}]_i \approx \mathbf{M}[\mathbf{S}_{k+1}^a]_i \quad (1.14)$$

Le problème de l'estimation de l'erreur modèle est très complexe, car cette erreur est par définition mal connue. Dans le cas du filtrage de rang réduit, un artifice assez simple consiste à utiliser un poids numérique  $\rho \in ]0, 1]$  appelé "facteur d'oubli", que l'on applique lors de la phase de prévision pour le calcul de la matrice de covariance des erreurs de prévision. Ainsi on a

$$\mathbf{P}_{k+1}^f = \frac{1}{\rho} \mathbf{S}_{k+1}^{f-} \mathbf{S}_{k+1}^{f-T} \quad (1.15)$$

On obtient alors l'algorithme du filtre SEEK:

### Initialisation

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{k=0} &= \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{P}_{k=0}^f &= \mathbf{S}_0^f \mathbf{S}_0^{fT} \end{aligned} \quad (1.16)$$

### Prévision

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{k+1}^f &= M_{k,k+1} \mathbf{x}_k^a \\ [\mathbf{S}_{k+1}^{f-}]_i &= M(\mathbf{x}_k^a + [\mathbf{S}_{k+1}^a]_i) - M(\mathbf{x}_k^a) \quad \forall i \\ \mathbf{P}_{k+1}^f &= \mathbf{S}_{k+1}^f \mathbf{S}_{k+1}^{fT} = \frac{1}{\rho} \mathbf{S}_{k+1}^{f-} \mathbf{S}_{k+1}^{f-T} \end{aligned} \quad (1.17)$$

### Analyse

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{k+1}^f &= \mathbf{S}_{k+1}^f \mathbf{S}_{k+1}^{fT} \\ \mathbf{K}_{k+1} &= \mathbf{S}_{k+1}^f (\mathbf{I} + (\mathbf{H}_{k+1} \mathbf{S}_{k+1}^f)^T \mathbf{R}_{k+1}^{-1} (\mathbf{H}_{k+1} \mathbf{S}_{k+1}^f))^{-1} (\mathbf{H}_{k+1} \mathbf{S}_{k+1}^f)^T \mathbf{R}_{k+1}^{-1} \\ \mathbf{x}_{k+1}^a &= \mathbf{x}_{k+1}^f + \mathbf{K}_{k+1} (\mathbf{y}_{k+1} - \mathbf{H}_{k+1} \mathbf{x}_{k+1}^f) \\ \mathbf{P}_{k+1}^a &= \mathbf{S}_{k+1}^f (\mathbf{I} + (\mathbf{H}_{k+1} \mathbf{S}_{k+1}^f)^T \mathbf{R}_{k+1}^{-1} (\mathbf{H}_{k+1} \mathbf{S}_{k+1}^f))^{-1} \mathbf{S}_{k+1}^{fT} \end{aligned} \quad (1.18)$$

## 1.3 Approche variationnelle

Introduites par Sasaki dès 1955, les méthodes variationnelles sont basées sur la minimisation d'une fonction coût  $J$  mesurant les écarts entre l'état estimé et les données disponibles. Alors que dans le cadre de l'approche stochastique les observations n'étaient utilisées qu'une

seule fois et n'influaient pas sur les calculs des divers estimés qui leurs étaient antérieurs, l'approche variationnelle va opérer globalement sur l'ensemble des observations disponibles dans la fenêtre d'assimilation pour réaliser la minimisation. Ainsi cette approche permet de calculer la trajectoire optimale du système et non plus la meilleure estimation de l'état en un point d'observation.

### 1.3.1 Idée générale

Considérons un modèle d'évolution du fluide:

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = M(\mathbf{x}(t)) \\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \end{cases} \quad (1.19)$$

avec  $\mathbf{x}$  vecteur d'état du fluide. La variable de contrôle dans le cas présent sera la condition initiale  $\mathbf{x}_0$ . Par souci de clarté, seule cette variable de contrôle est choisie; il est cependant possible de contrôler d'autres termes.

La fonction coût  $J$  s'exprime alors comme la somme d'un terme de régularisation  $J_b$  mesurant l'écart à l'ébauche et d'un terme mesurant l'écart aux observations  $J_0$ :

$$\begin{aligned} J(\mathbf{x}_0) &= \frac{1}{2} \int_0^T \|\mathbf{H}\mathbf{x}(t) - \mathbf{y}(t)\|^2 dt + \frac{1}{2} \|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_b\|_B^2 \\ &= J_0(\mathbf{x}_0) + J_b(\mathbf{x}_0) \end{aligned} \quad (1.20)$$

Rechercher le minimum de cette fonction va nécessiter l'étude de ses points critiques, *ie* rechercher les points  $\mathbf{x}_0^*$  vérifiant:

$$\nabla J(\mathbf{x}_0^*) = 0 = \nabla J_b(\mathbf{x}_0^*) + \nabla J_0(\mathbf{x}_0^*) \quad (1.21)$$

Le gradient du terme  $J_b$  étant simple à calculer, intéressons nous à celui du terme  $J_0$ . La fonction  $J_0$  ne dépendant pas explicitement de la variable de contrôle  $\mathbf{x}_0$ , le calcul direct du gradient s'avère ardu voire impossible. Cependant, ce calcul est réalisable via la méthode de l'adjoint. En voici une description sommaire.

Considérons  $\hat{\mathbf{x}}$  la dérivée de Gâteaux de  $\mathbf{x}$  dans la direction  $h$ , et  $\hat{J}$  celle de  $J$ . On a alors

$$\begin{cases} \frac{d\hat{\mathbf{x}}(t)}{dt} = \frac{\partial M}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}(t))\hat{\mathbf{x}}(t) \\ \hat{\mathbf{x}}(0) = h \end{cases} \quad (1.22)$$

$$\hat{J}(\mathbf{x}_0, h) = \int_0^T (\mathbf{H}\mathbf{x}(t) - \mathbf{y}(t), \mathbf{H}\hat{\mathbf{x}}(t)) dt \quad (1.23)$$

Introduisons  $\mathbf{p}$  la variable adjointe. On multiplie alors l'équation précédente par  $\mathbf{p}$  et on intègre sur  $[0, T]$ :

$$\int_0^T \left( \frac{d\hat{\mathbf{x}}(t)}{dt}, \mathbf{p} \right) dt = \int_0^T \left( \frac{\partial M}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}(t))\hat{\mathbf{x}}(t), \mathbf{p} \right) dt \quad (1.24)$$

Après une intégration par parties, il vient:

$$(\hat{\mathbf{x}}(T), \mathbf{p}(T)) - (\hat{\mathbf{x}}(0), \mathbf{p}(0)) = \int_0^T \left( \hat{\mathbf{x}}(t), \left[ \frac{\partial M}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}(t)) \right]^T \mathbf{p}(t) + \frac{d\mathbf{p}(t)}{dt} \right) dt \quad (1.25)$$

Si l'on définit  $\mathbf{p}$  comme la solution du modèle adjoint suivant:

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{p}(t)}{dt} + \left[ \frac{\partial M}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}(t)) \right]^T \mathbf{p}(t) = \mathbf{H}^T(\mathbf{H}\mathbf{x}(t) - \mathbf{y}(t)) \\ \mathbf{p}(T) = 0 \end{cases} \quad (1.26)$$

L'équation (1.25) devient alors:

$$-(\widehat{\mathbf{x}}(0), \mathbf{p}(0)) = \int_0^T (\mathbf{H}\widehat{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{y}(t), \mathbf{H}\widehat{\mathbf{x}}(t)) dt \quad (1.27)$$

Par définition du gradient de  $J_0$ , il ne reste plus qu'à identifier avec l'équation de  $\widehat{J}(\mathbf{x}_0, h)$ , pour obtenir:

$$\nabla J(\mathbf{x}_0) = -\mathbf{p}(0) \quad (1.28)$$

En intégrant de manière rétrograde le modèle adjoint (1.26), il est alors possible d'avoir accès au gradient de la fonction coût. On peut donc minimiser  $J$ .

D'où le système d'optimalité suivant:

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = M(\mathbf{x}(t)) \\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \\ \frac{d\mathbf{p}(t)}{dt} + \left[ \frac{\partial M}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}(t)) \right]^T \mathbf{p}(t) = \mathbf{H}^T(\mathbf{H}\mathbf{x}(t) - \mathbf{y}(t)) \\ \mathbf{p}(T) = 0 \\ \nabla J(\mathbf{x}_0) = -\mathbf{p}(0) = 0 \end{cases} \quad (1.29)$$

Par la suite, deux méthodes d'assimilation variationnelle seront présentées plus en détail: le 4D-var et le 4D-var incrémental.

### 1.3.2 4D-var

La méthode du 4D-var a pour but d'obtenir la trajectoire optimale sur une fenêtre de temps donnée, la période d'assimilation. Pour cela il est nécessaire de prendre en compte toutes les observations contenues dans cette fenêtre. A partir d'une condition initiale pour la phase d'assimilation sur une fenêtre donnée, l'état d'ébauche  $\mathbf{x}^b$ , l'algorithme 4D-var va fournir un état analysé  $\mathbf{x}^a$  de cet état, qui sera intégré par le modèle afin d'obtenir la trajectoire optimale. Cet état analysé est obtenu en minimisant une fonction coût comme vu précédemment.

En reprenant les notations introduites dans le cas général, la fonction coût à minimiser s'écrit:

$$J(\mathbf{x}_0) = \frac{1}{2}(\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}^b)^T \mathbf{B}^{-1}(\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}^b) + \frac{1}{2} \sum_{i=0}^N (H_i[M_{0,i}(\mathbf{x}_0)] - \mathbf{y}_i)^T \mathbf{R}_i^{-1} (H_i[M_{0,i}(\mathbf{x}_0)] - \mathbf{y}_i) \quad (1.30)$$

$\mathbf{B}$  représente la matrice de covariance d'erreur d'ébauche: elle permet de mesurer l'erreur liée à l'état du modèle au début de la phase d'assimilation. Elle correspond à la matrice  $\mathbf{P}_0^f$  présente dans le cadre du filtre de Kalman. Les matrices  $\mathbf{R}_i$  représentent les covariances d'erreur d'observation au temps  $t_i$ . La condition initiale  $\mathbf{x}^a(t_0)$  est obtenue en résolvant l'équation:

$$\nabla J(\mathbf{x}^a(t_0)) = 0 \quad (1.31)$$

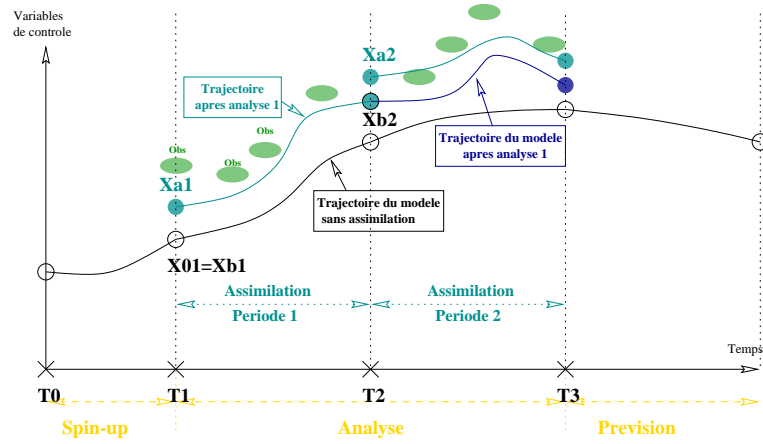


FIG. 1.2 – Assimilation par le 4D-var

Comme dans le cas général, ce gradient sera obtenu par la méthode de l'adjoint décrite précédemment.

Si les opérateurs  $H_i$  et  $M$  sont linéaires,  $J$  est alors quadratique d'où l'unicité de la solution. De plus si le modèle est parfait, il y a équivalence entre les solutions trouvées par le 4D-var et le filtre de Kalman: il est possible de montrer qu'en partant des mêmes données l'analyse 4D-var à la fin de la période d'assimilation est égale à celle du filtre de Kalman au même instant. Dans le cadre de l'océanographie opérationnelle ou de la météorologie, ces opérateurs ne sont pas linéaires: on utilisera alors leurs linéaires tangents.

L'assimilation par le 4D-var est schématisée figure 1.2

### 1.3.3 4D-var incrémental

Le problème de la non linéarité des différents opérateurs entraînant un surcoût de calcul de la méthode pour des résultats plus ou moins fiables, une alternative consiste à modifier la fonction coût afin de la rendre quadratique: c'est la version incrémentale du 4D-var.

La fonction coût ne va plus être minimisée par rapport à l'état  $\mathbf{x}_0$ , mais par rapport à un incrément  $\delta\mathbf{x}_0$  tel que  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}^b + \delta\mathbf{x}_0$ . Les opérateurs  $H_i$  et  $M$  sont de plus linéarisés au voisinage de  $\mathbf{x}^b$ :

$$M_{0,i}(\mathbf{x}^b + \delta\mathbf{x}_0) \approx M_{0,i}(\mathbf{x}^b) + \mathbf{M}_{0,i}\delta\mathbf{x}_0 \quad \forall i \quad (1.32)$$

$$H_i(\mathbf{x}^b + \delta\mathbf{x}_0) \approx H_i(\mathbf{x}^b) + \mathbf{H}_i\delta\mathbf{x}_0 \quad \forall i \quad (1.33)$$

D'où la nouvelle fonction coût:

$$J(\delta\mathbf{x}_0) = \frac{1}{2}\delta\mathbf{x}_0^T \mathbf{B}^{-1}\delta\mathbf{x}_0 + \frac{1}{2} \sum_{i=0}^N (\mathbf{H}_i \mathbf{M}_{0,i} \delta\mathbf{x}_0 - \mathbf{d}_i)^T \mathbf{R}_i^{-1} (\mathbf{H}_i \mathbf{M}_{0,i} \delta\mathbf{x}_0 - \mathbf{d}_i) \quad (1.34)$$

avec  $\mathbf{d}_i = \mathbf{y}_i - H_i(M_{0,i}(\mathbf{x}^b))$  vecteur d'innovation.

Là encore, on recherche l'incrément minimisant cette fonction coût. On fera naturellement appel à la méthode de l'adjoint pour obtenir la valeur du gradient.

La minimisation peut se faire de façon classique grâce aux algorithmes du type gradient conjugué, mais il existe également une variante basée sur les notions de "boucle externe" et "boucle interne".

Cette technique a pour but de réactualiser la trajectoire du modèle (i.e. le linéaire tangent) au cours de la minimisation. Pour cela, on réalise une "boucle externe" où l'on propage l'état initial en cours d'analyse (ébauche + incrément). La notion de "boucle interne" correspond à la minimisation de la fonction coût via le calcul de l'incrément optimal (typiquement les boucles présentes dans le gradient conjugué). L'algorithme se constitue alors de deux boucles: on met à jour la trajectoire au bout d'un certain nombre d'itération de la phase de minimisation et on itère le procédé.

### 1.3.4 4D-var réduit

Dans le même ordre d'idée que ce qui a été fait avec le filtre SEEK dans le cadre stochastique, il est possible d'appliquer le principe de la réduction d'ordre au 4D-var incrémental. Pour cela, il va être nécessaire de préconditionner la fonction coût  $J$ . Ainsi,  $\mathbf{B}$  la matrice de covariance d'erreur d'ébauche est symétrique définie positive: il est possible d'en obtenir une décomposition sous la forme de Choleski

$$\mathbf{B} = \mathbf{U}\mathbf{U}^T \quad (1.35)$$

Il est possible d'approximer  $\mathbf{B}$ , par exemple via une analyse EOF, à l'aide d'une matrice de rang réduite  $\mathbf{U}_{red}$  par

$$\mathbf{B} = \mathbf{U}_{red}\mathbf{U}_{red}^T \quad (1.36)$$

On applique alors le changement de variable suivant à l'incrément d'analyse:

$$\delta \mathbf{x} = \mathbf{U}_{red}\chi \quad (1.37)$$

où  $\chi$  est la variable de contrôle dans l'espace réduit.  $J$  vaut alors:

$$J(\chi) = \frac{1}{2}\chi^T\chi + \frac{1}{2}\sum_{i=0}^N(\mathbf{H}_i\mathbf{M}_{0,i}\delta\mathbf{x}_0 - \mathbf{d}_i)^T\mathbf{R}_i^{-1}(\mathbf{H}_i\mathbf{M}_{0,i}\delta\mathbf{x}_0 - \mathbf{d}_i) \quad (1.38)$$

La minimisation de  $J$  s'opère alors dans l'espace réduit: celui de  $\chi$ . Ce préconditionnement permet, en outre, de rendre évident le calcul du gradient du terme  $J_b$ : on s'épargne ainsi le calcul de l'inverse de  $\mathbf{B}$  pour l'obtenir.

## 1.4 Réduction d'ordre: l'analyse EOF

Comme il a été vu précédemment, le filtre SEEK ainsi que le 4D-var réduit nécessitent de travailler dans un espace de rang réduit. Le principe de la réduction d'ordre d'un espace consiste à ne conserver que les vecteurs d'une de ses bases considérés comme les plus représentatifs. Nous allons voir ici une méthode permettant de réaliser une telle opération: l'analyse EOF ou analyse en composantes principales.

Cette analyse consiste à extraire les modes de variabilité les plus représentatifs d'une série temporelle d'états du modèle. Soit  $(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)$  une telle série. Notons  $\bar{\mathbf{x}}$  sa moyenne temporelle. Recentrons cette série et posons  $\mathbf{X}$  la matrice dont la ligne  $i$  vaut  $\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}}$ . Alors par des calculs algébriques on montre que les vecteurs propres de la matrice  $\mathbf{X}^T\mathbf{X}$  correspondent aux différents

modes de variabilité du système étudié et sont appelés EOFs ou composantes principales. Il ne reste plus alors qu'à choisir ceux correspondant aux  $r$  valeurs propres les plus grandes. On obtient alors une base réduite de dimension  $r$  représentative de la variabilité du système et qui est de plus orthogonale. Pour le 4D-var incrémental, il ne reste plus alors qu'à chercher l'incrément initial, qui est la variable de contrôle de notre système optimal, sous la forme:

$$\delta \mathbf{x}_0 = \sum_{i=1}^r \alpha_i \mathbf{C}_i \quad (1.39)$$

où les  $\mathbf{C}_i$  sont les EOFs conservées. Comme nous le verrons dans le cadre de la partie résultats numériques, très peu d'EOFs sont nécessaires en pratique (pour des résultats plus complets voir les travaux de S. Durbiano [2] ou de C. Robert [7]).



## Chapitre 2

# Hybridation des deux approches

### 2.1 Motivations

Nous avons vu dans le chapitre précédent qu'il existait deux approches pour faire de l'assimilation de données, celles-ci pouvant être équivalentes sous certaines hypothèses. Cependant les différences notoires entre ces deux approches leur procurent divers avantages l'une par rapport à l'autre.

Ainsi, l'avantage majeur que possèdent les méthodes statistiques réside dans la gestion des matrices de covariance d'erreur d'ébauche, d'analyse et du modèle. Les algorithmes dérivés du filtre de Kalman effectuent des mises à jour des matrices de covariance d'erreur d'ébauche à chaque occurrence d'observation, là où le 4D-var laisse constante cette matrice au cours de la fenêtre d'assimilation. De plus cette matrice est calculée explicitement dans le cadre de l'approche stochastique même si une réduction d'ordre est nécessaire dans la pratique (cf partie I: le filtre SEEK). Le 4D-var ne fournit a priori aucune information sur la matrice d'erreur d'analyse en sortie d'algorithme. L'ajout d'un tel calcul est très coûteux. Enfin, les algorithmes de type Kalman permettent, dans une certaine mesure, une prise en compte de l'erreur modèle sans avoir de développements supplémentaires à réaliser (modification de la fonction coût pour le 4D-var notamment).

D'un autre côté, de par la nature même de l'approche variationnelle, l'algorithme 4D-var réalise un lissage par le biais du calcul sur une fenêtre contenant plusieurs mesures. Ainsi la portée de valeurs singulières s'en trouve réduite. Des observations aberrantes à une date fixée n'auront que peu d'incidence sur les résultats obtenus à la fin de la phase d'assimilation. Par contre, dans le cadre du filtre de Kalman, l'analyse a lieu directement à partir de l'observation singulière. Celle-ci influe donc fortement sur la valeur de l'état analysé. L'erreur obtenue sera alors propagée dans toute la suite de l'assimilation et peut entraîner une erreur importante sur la trajectoire (discontinue) du modèle. A l'instar de l'intégrale en analyse, l'algorithme du 4D-var minimise le poids d'une valeur singulière afin de ne garder que la trajectoire globale de l'état analysé.

D'où l'intérêt d'une méthode combinant ces deux approches: obtenir une méthode hybride permettant la gestion des différentes erreurs comme le filtre de Kalman, tout en minimisant le rôle de possibles valeurs singulières. Une telle méthode n'a d'intérêt, bien évidemment, que si son coût en terme de temps de calcul et d'espace mémoire n'est pas prohibitif.

Enfin comme annoncé précédemment, si l'on se place dans le cas d'un modèle linéaire et parfait, d'un opérateur d'observation linéaire, il est possible de montrer qu'en partant des mêmes données l'analyse 4D-var à la fin de la période d'assimilation est égale à celle du filtre de Kalman au même instant. On a donc, dans une certaine mesure, équivalence entre les deux méthodes. Ceci laisse donc penser que l'hybridation de ces deux théories est réalisable en pratique.

## 2.2 Algorithmique de l'hybridation

La méthode qui va être implémentée correspond à celle proposée par F. Veersé en 2000 [9]. Il s'agit de réaliser un algorithme de type 4D-var incrémental utilisant une covariance d'erreur d'ébauche évoluant selon les fenêtres d'assimilation. C'est dans cette optique qu'un lisseur SEEK ainsi qu'un 4D-var incrémental de rang réduit sont combinés. L'algorithme obtenu opère sur chaque fenêtre d'assimilation en deux phases: une première d'analyse où l'on calcule un incrément (par 4D-var incrémental) via la minimisation d'une fonction coût en vue d'obtenir l'état analysé au temps  $t_0$  de la fenêtre et où l'on calcule la matrice de covariance d'erreur d'analyse, puis une phase de prédiction où l'on propage suivant la dynamique du modèle les différents intervenants de l'assimilation.

Il est important de noter qu'une telle méthode nécessite que les calculs concernant l'incrément ainsi que ceux concernant les différentes matrices de covariance d'erreur soient basés sur la même réduction d'ordre. Celle-ci a lieu lors de l'initialisation de l'algorithme. Par la suite la base réduite obtenue est propagée via le modèle permettant la réactualisation de la matrice de covariance d'erreur d'ébauche lors de chaque changement de fenêtre.

De plus l'emploi du SEEK rend nécessaire la connaissance au début de la phase d'analyse des diverses matrices d'erreurs obtenues lors de la phase d'analyse opérée sur la fenêtre d'assimilation précédente. Notons ainsi  $\mathbf{P}_-^a$  la matrice de covariance d'erreur d'analyse obtenue lors de l'assimilation précédente:  $\mathbf{P}_-^a = \mathbf{P}^a(t_0 - T)$ , avec  $T$  la longueur de cette précédente fenêtre d'assimilation. Des notations similaires seront employées par la suite pour d'autres matrices.

Définissons les différentes matrices provenant de la phase d'assimilation précédente. On suppose que la matrice d'erreur d'analyse est de rang réduit. Elle est factorisée sous la forme  $\mathbf{P}_-^a = \mathbf{L}_- \mathbf{U}_- \mathbf{L}_-^T$ , avec  $\mathbf{U}_-$  symétrique définie positive. En effectuant une décomposition de Choleski,  $\mathbf{U}_-$  s'écrit  $\mathbf{U}_- = \mathbf{W}_- \mathbf{W}_-^T$ . On pose alors  $\mathbf{L}_0 = \mathbf{M}_{-T,0} \mathbf{L}_-$ , la base des vecteurs propres étant ainsi propagée via le modèle linéaire tangent.

L'algorithme de Veersé est alors le suivant:

### Analyse

- Application du 4D-var incrémental: minimisations de la fonction coût  $J$  dans l'espace réduit.

$$J(\chi) = \frac{1}{2} \chi^T \chi + \frac{1}{2} \sum_{i=0}^N (\mathbf{H}_i(\mathbf{x}_i^g) \mathbf{M}_{0,i} \delta \mathbf{x}_0 - \mathbf{d}_i)^T \mathbf{R}_i^{-1} (\mathbf{H}_i(\mathbf{x}_i^g) \mathbf{M}_{0,i} \delta \mathbf{x}_0 - \mathbf{d}_i) \quad (2.1)$$

avec

$$\mathbf{d}_i = \mathbf{y}_i - H_i(\mathbf{x}_i^g) + \sum_{i=0}^N \mathbf{H}_i(\mathbf{x}_i^g) (\mathbf{x}_i^g - \mathbf{x}_i^f) \quad (2.2)$$

et le préconditionnement suivant:

$$\delta \mathbf{x}_0 = (\mathbf{L}_0 \mathbf{W}_-) \chi \quad (2.3)$$

avec  $\delta \mathbf{x}_0$  l'incrément correspondant au 4D-var incrémental.

– Après la dernière minimisation: calcul de la matrice d'erreur d'analyse de rang réduit

$$\mathbf{x}^a(t_0) = \mathbf{x}^f(t_0) + \delta \mathbf{x}_0^* \quad (2.4)$$

$$\mathbf{U}_0^{-1} = \mathbf{U}_-^{-1} + \sum_{i=0}^N (\mathbf{H}_i(\mathbf{x}_i^g) \mathbf{M}_{0,i} \mathbf{L}_0)^T \mathbf{R}_i^{-1} (\mathbf{H}_i(\mathbf{x}_i^g) \mathbf{M}_{0,i} \mathbf{L}_0) \quad (2.5)$$

et de sa décomposition de Choleski  $\mathbf{W}_0^{-T} \mathbf{W}_0^{-1}$ .

### Prédiction

La phase de prédiction va consister à faire évoluer selon la dynamique du modèle l'état analysé, et par la même occasion à calculer la matrice d'erreur de prévision.

$$\mathbf{x}^f(t_N) = M_{0,N}(\mathbf{x}^a(t_0)) \quad (2.6)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_+ &= M_{0,N} \mathbf{L}_0 \\ \mathbf{P}^f(t_N) &= \mathbf{L}_+ \mathbf{W}_0 \mathbf{W}_0^T \mathbf{L}_+^T \end{aligned} \quad (2.7)$$

Dans le cas d'un algorithme de minimisation faisant intervenir une réactualisation de la trajectoire du modèle en cours d'analyse (notion de "boucle externe"), il est alors nécessaire de mettre à jour l'état en cours d'analyse  $\mathbf{x}^g(t_0)$  entre chaque minimisation:

$$\mathbf{x}^g(t_0) = \mathbf{x}^f(t_0) + \delta \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}^f(t_0) + (\mathbf{L}_0 \mathbf{W}_-) \chi \quad (2.8)$$

Dans le cas contraire,  $\mathbf{x}_i^g$  est pris égal à  $\mathbf{x}_i^f$ .

Cet algorithme est schématisé figure 2.1.

Le coût de cette méthode est ainsi équivalent à la somme des coûts du filtre SEEK et du 4D-var réduit.

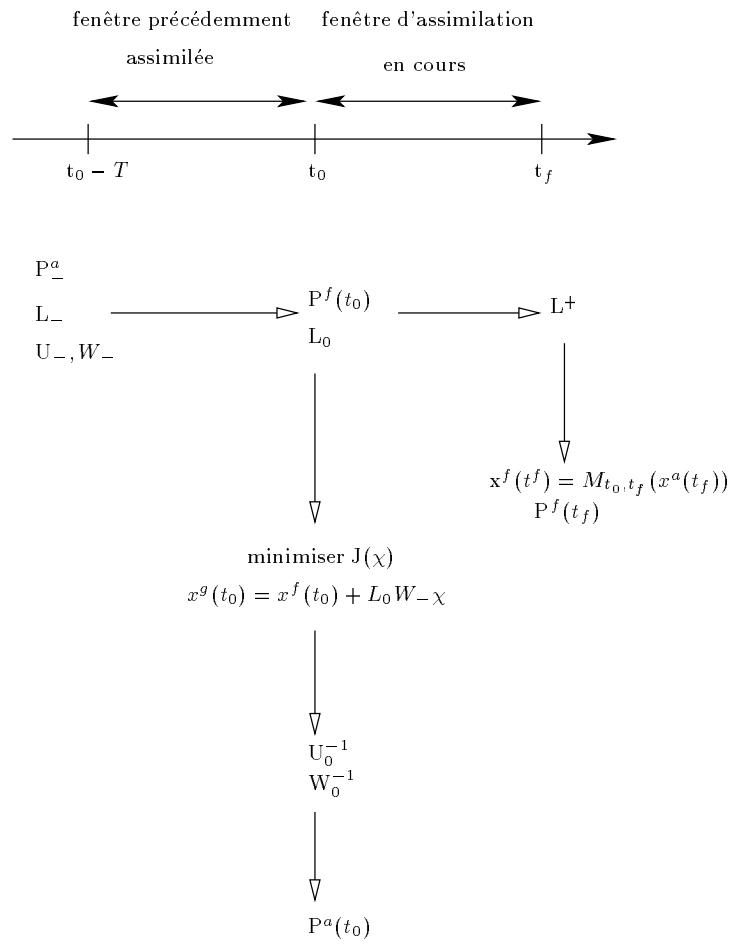


FIG. 2.1 – Algorithmique de l'hybridation

## Chapitre 3

# Expérimentation dans le cas d'un modèle linéaire

### 3.1 Le modèle

Nous allons expérimenter dans cette partie la méthode introduite précédemment dans le cas très simple d'une équation 1-D de transport-diffusion linéaire avec des conditions aux limites de Dirichlet homogènes.

Le modèle est le suivant:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \alpha \frac{\partial u}{\partial x} - \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = g & x \in ]0, 1[, t > 0 \\ u(0, t) = u(1, t) = 0 & t \geq 0 \\ u(x, 0) = \sin \pi x \sin \pi(1 - x) & x \in ]0, 1[ \end{cases} \quad (3.1)$$

Afin de pouvoir étudier finement le comportement de la méthode, nous allons nous placer dans le cas où nous connaissons parfaitement la solution exacte. On choisit  $u = \sin \pi x(t + 1) \sin \pi(1 - x)(t + 1)$ , le second membre vaut alors

$$\begin{aligned} g(x, t) = & \pi[x + \alpha(t + 1)] \cos \pi x(t + 1) \sin \pi(1 - x)(t + 1) \\ & + \pi[1 - x - \alpha(t + 1)] \sin \pi x(t + 1) \cos \pi(1 - x)(t + 1) \\ & + 2\nu\pi^2(t + 1)^2[\sin \pi x(t + 1) \sin \pi(1 - x)(t + 1) + \cos \pi x(t + 1) \cos \pi(1 - x)(t + 1)] \end{aligned} \quad (3.2)$$

De plus, seules des expériences jumelles sont réalisées. L'état considéré comme vrai sera celui provenant de la dynamique du modèle discrétisé et non pas celui provenant de la solution explicite du modèle continu. Les calculs d'erreur compareront donc les résultats fournis par l'assimilation à ceux fournis par la dynamique du modèle discrétisé. Pour chaque fenêtre d'assimilation, l'ébauche sera perturbée afin d'obtenir un biais vis-à-vis du modèle. A charge à l'assimilation de le corriger.

### 3.2 Discrétisation

On discrétise en temps par un schéma d'Euler et en espace par un schéma centré d'ordre 2:

$$\frac{1}{\Delta t}(u_i^{n+1} - u_i^n) + \frac{\alpha}{2\Delta x}(u_{i+1}^n - u_{i-1}^n) - \frac{\nu}{(\Delta x)^2}(u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n) = g(i\Delta x, n\Delta t) \quad (3.3)$$

pour  $i = 1, \dots, I - 1$  et  $n = 0, \dots, N - 1$ , avec  $u_i^0 = \sin i\pi\Delta x \sin i\pi(1 - \Delta x)$  et  $u_0^n = u_I^n = 0$ .

Les conditions de stabilité de ce schéma sont:  $\nu \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \leq \frac{1}{2}$  et  $\Delta t \leq \frac{2\nu}{\alpha^2}$ . Avec un pas de temps de  $\frac{1}{700}$  et une grille spatiale de 21 points, on prend  $\nu = 1.10^{-4}$  et  $\alpha = 0.1$ . Matriciellement, on note ce schéma:

$$\begin{cases} \mathbf{X}_{n+1} = \mathbf{X}_n + \Delta t \mathbf{A} \mathbf{X}_n + \Delta t g_n \\ \mathbf{X}(0) = \mathbf{X}^b + \delta \mathbf{x} \end{cases} \quad (3.4)$$

Avec  $\mathbf{A}$  définie par:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -\frac{2\nu}{\Delta x^2} & \frac{\nu}{\Delta x^2} - \frac{\alpha}{2\Delta x} & 0 & \dots & 0 \\ \frac{\alpha}{2\Delta x} + \frac{\nu}{\Delta x^2} & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \frac{\nu}{\Delta x^2} - \frac{\alpha}{2\Delta x} \\ 0 & \dots & 0 & \frac{\alpha}{2\Delta x} + \frac{\nu}{\Delta x^2} & -\frac{2\nu}{\Delta x^2} \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

Considérons  $\widehat{\mathbf{X}}$  la dérivée de Gâteaux de  $\mathbf{X}$  dans la direction  $h$ . On a alors

$$\begin{cases} \widehat{\mathbf{X}}_{n+1} = \widehat{\mathbf{X}}_n + \Delta t \mathbf{A} \widehat{\mathbf{X}}_n \\ \widehat{\mathbf{X}}(0) = \mathbf{h} \end{cases} \quad (3.6)$$

La dérivée directionnelle de  $J$  vaut (cf calculs en annexe):

$$\widehat{J}(\delta \mathbf{x}, \mathbf{h}) = (\mathbf{B}^{-1} \delta \mathbf{x}, \mathbf{h}) + \sum_{i=0}^N (\mathbf{H}_i^T \mathbf{R}_i^{-1} (\mathbf{H}_i \mathbf{X}_i - \mathbf{Y}_i), \widehat{\mathbf{X}}_i) \quad (3.7)$$

D'autre part, soit  $\mathbf{p}$  l'état adjoint. On a alors:

$$\sum_{n=0}^N (\widehat{\mathbf{X}}_n, \mathbf{p}_n) = \sum_{n=1}^N (\widehat{\mathbf{X}}_{n-1} + \Delta t \mathbf{A} \widehat{\mathbf{X}}_{n-1}, \mathbf{p}_n) + (\widehat{\mathbf{X}}_0, \mathbf{p}_0) \quad (3.8)$$

D'où:

$$\sum_{n=0}^N (\widehat{\mathbf{X}}_n, \mathbf{p}_n) = \sum_{n=0}^{N-1} ((\widehat{\mathbf{X}}_n, \mathbf{p}_{n+1}) + \Delta t (\mathbf{A} \widehat{\mathbf{X}}_n, \mathbf{p}_{n+1})) + (\mathbf{p}_0, \mathbf{h}) \quad (3.9)$$

Soit:

$$\sum_{n=0}^N (\widehat{\mathbf{X}}_n, \mathbf{p}_n) = \sum_{n=0}^{N-1} (\widehat{\mathbf{X}}_n, \mathbf{p}_{n+1} + \Delta t \mathbf{A}^T \mathbf{p}_{n+1}) + (\mathbf{p}_0, \mathbf{h}) \quad (3.10)$$

Posons:

$$\begin{cases} \mathbf{p}_n = \mathbf{p}_{n+1} + \Delta t \mathbf{A}^T \mathbf{p}_{n+1} + \mathbf{H}_n^T \mathbf{R}_n^{-1} (\mathbf{H}_n \mathbf{X}_n - \mathbf{Y}_n) \\ \mathbf{p}_N = \mathbf{H}_N^T \mathbf{R}_N^{-1} (\mathbf{H}_N \mathbf{X}_N - \mathbf{Y}_N) \end{cases} \quad (3.11)$$

Par identification, il vient:

$$\nabla J(\delta \mathbf{x}) = -\mathbf{p}_0 + \mathbf{B}^{-1} \delta \mathbf{x} \quad (3.12)$$

On retrouve alors le terme qui est obtenu lorsque  $J = J_0$ , ie  $\mathbf{p}_0$ , et le terme qui provient de  $J_b$ ,  $\mathbf{B}^{-1} \delta \mathbf{x}$ . Dans notre cas présent,  $\mathbf{B}$  est définie via sa "racine carrée":  $\mathbf{B}^{\frac{1}{2}} = \mathbf{L}_0 \mathbf{W}_-$ .

### 3.3 Analyse EOF

Comme vu dans la partie précédente, l'algorithme de l'hybridation nécessite d'effectuer une réduction d'ordre de la matrice de covariance d'erreur d'ébauche. La technique employée est l'analyse EOF décrite précédemment. Nous allons donc appliquer cela à notre cas d'étude. Les conditions de l'expérience sont les suivantes: la durée de la trajectoire est de deux secondes. Un sous-échantillonnage en temps de  $\frac{1}{10}$  ainsi qu'un autre en espace de  $\frac{1}{5}$  sont réalisés.

Les figures 3.1, 3.2 et 3.3 représentent les trois premiers vecteurs propres associés aux trois valeurs propres les plus significatives. La figure 3.4 montre les huit premières valeurs propres.

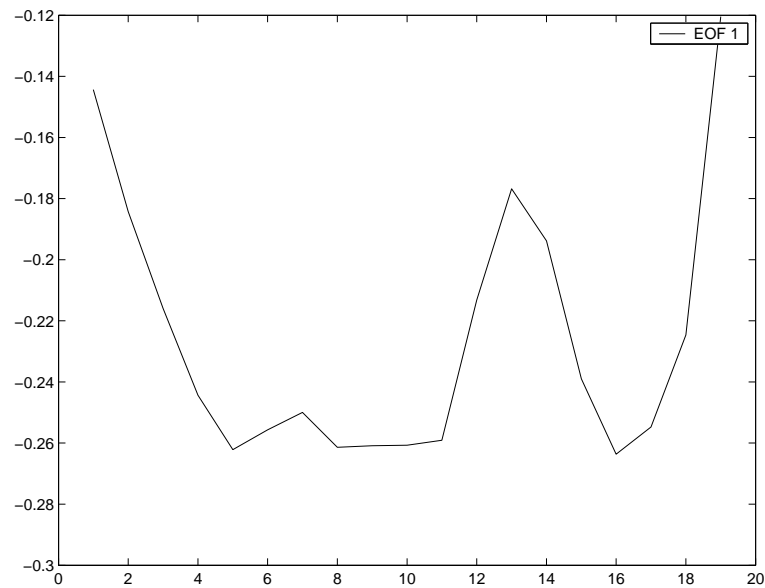


FIG. 3.1 – *Premier vecteur propre*

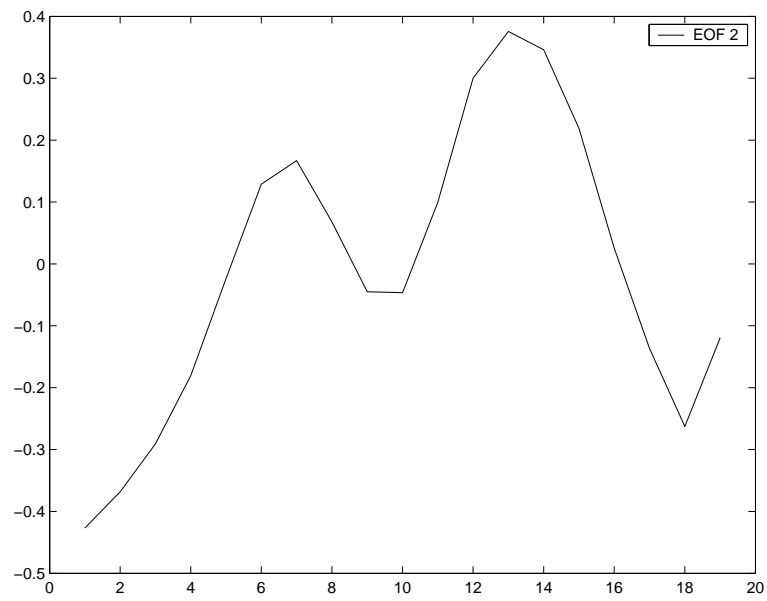


FIG. 3.2 – *Second vecteur propre*

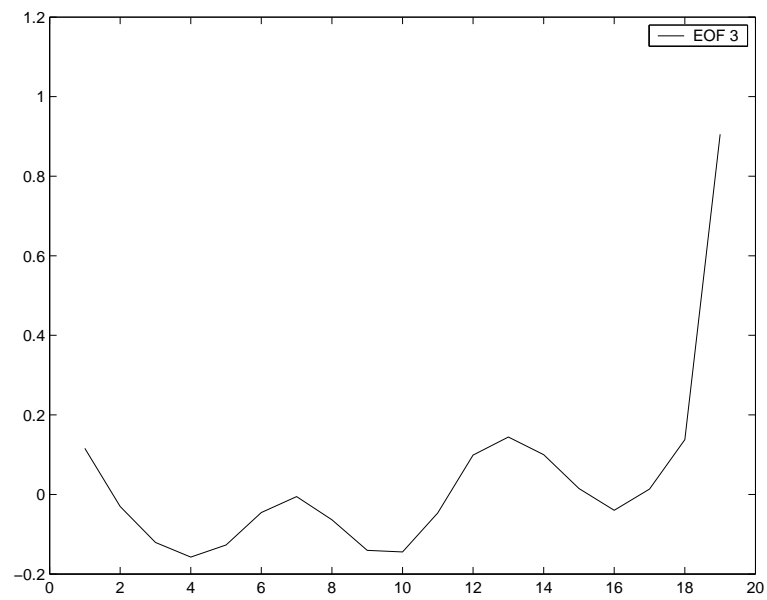
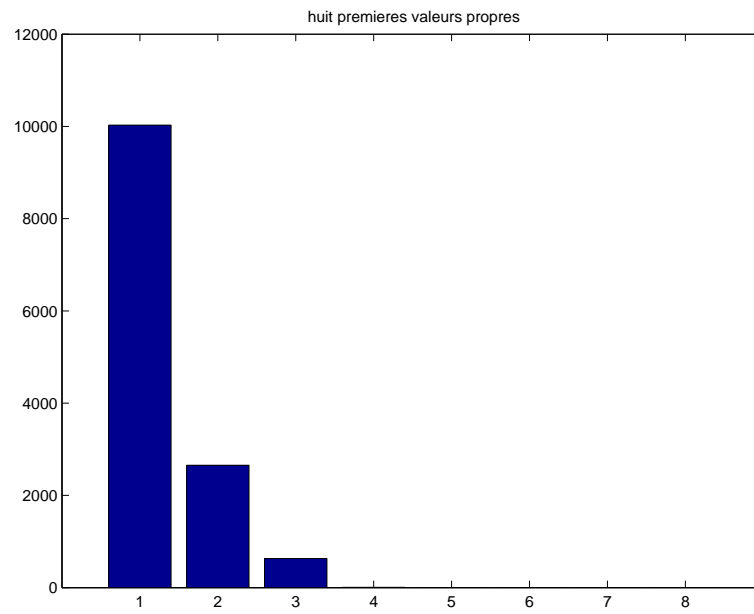


FIG. 3.3 – *Troisième vecteur propre*



FIG. 3.4 – *Huit plus grandes valeurs propres*

La figure 3.4 permet de se rendre compte de l'importance du premier mode vis à vis des autres (les ordres de grandeur des valeurs propres à partir de la sixième vont de  $10^{-6}$  à  $10^{-13}$ ). Ainsi seuls les trois premiers modes semblent significatifs. Néanmoins les huit premiers vecteurs propres seront conservés pour la suite des expérimentations. Ils représentent 99% d'inertie.

### 3.4 Premiers résultats sur une fenêtre d'assimilation

On s'intéresse dans ce cas au comportement de l'algorithme sur une seule fenêtre d'assimilation afin d'en étudier la sensibilité aux observations.

#### Observations parfaites

On suppose tout d'abord que les observations sont parfaites: aucun bruit intervenu par exemple lors de la prise de mesure. La figure 3.5 représente l'erreur RMS dans le cas où aucun échantillonnage en temps ou en espace n'est effectué sur les observations. Cette erreur est définie par  $\frac{\|\mathbf{x}^t - \mathbf{x}^a\|_2}{\|\mathbf{x}^t\|_2}$ , avec  $\mathbf{x}^t$  l'état vrai du système.

Pour la figure 3.6, le sous-échantillonnage en temps vaut  $\frac{1}{2}$ , celui en espace vaut  $\frac{1}{5}$ . L'algorithme d'hybridation dans ce cas simple semble parfaitement s'adapter à l'échantillonnage puisque l'erreur varie peu avec le sous-échantillonnage.

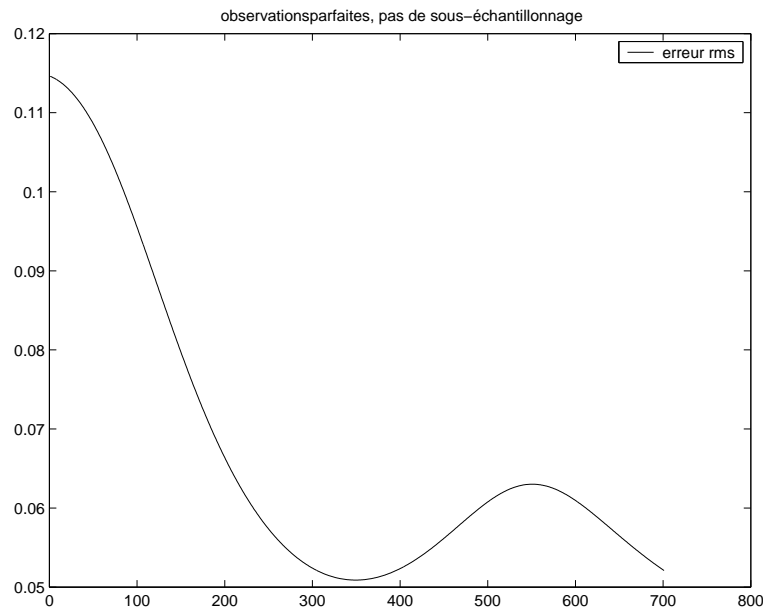


FIG. 3.5 – Erreur RMS: observations parfaites, aucun échantillonnage

#### Observations bruitées

On ajoute maintenant un bruit sur les observations qui suit une loi normale de moyenne nulle, de variance  $3.10^{-2}$ . La figure 3.7 représente l'erreur RMS dans le cas où aucun échantillonnage en temps ou en espace n'est effectué. Pour la figure 3.8, le sous-échantillonnage en temps vaut  $\frac{1}{2}$ , celui en espace vaut  $\frac{1}{5}$ . Pour la figure 3.9, le sous-échantillonnage en temps vaut  $\frac{1}{10}$ , celui

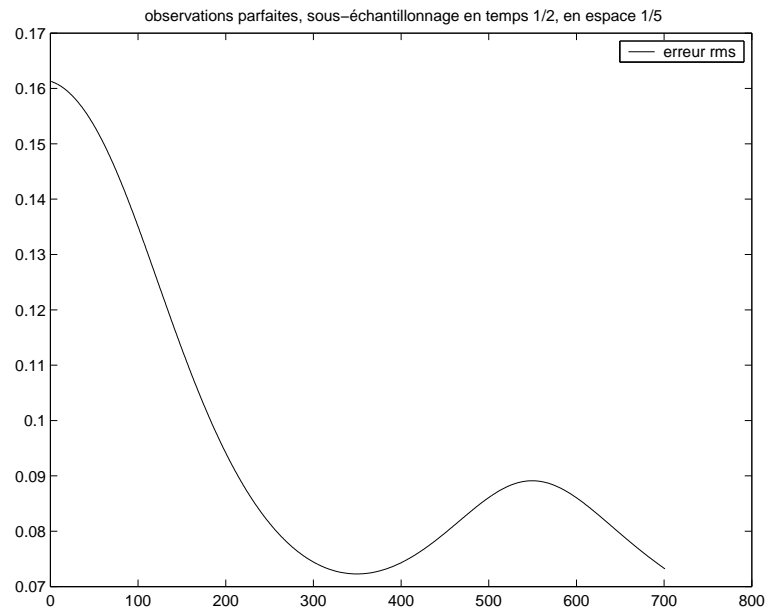
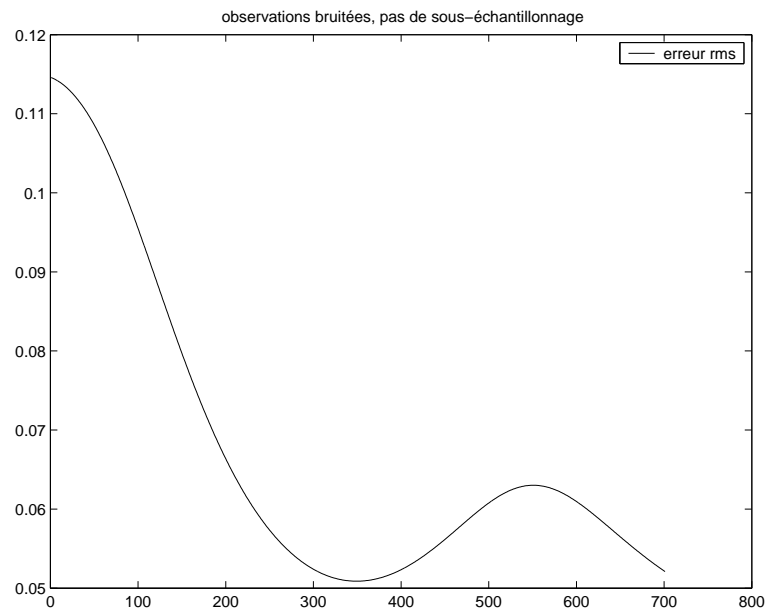
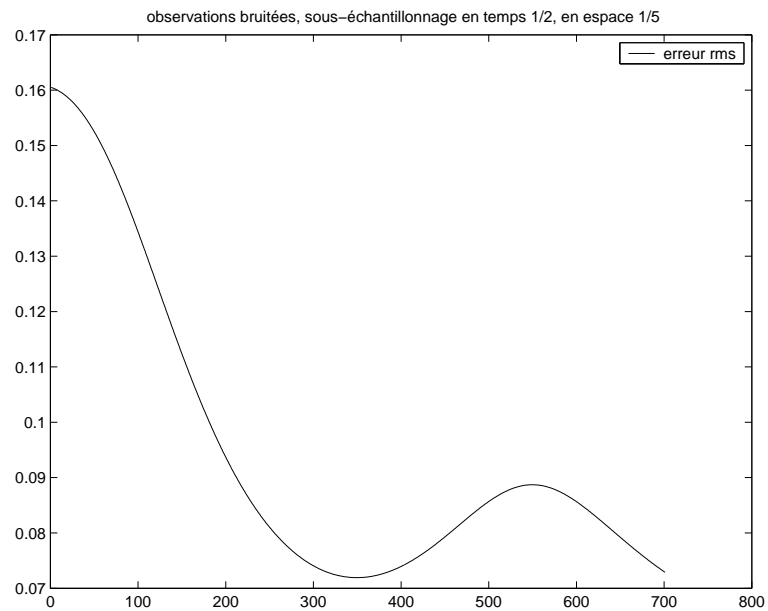


FIG. 3.6 – Erreur RMS: observations parfaites, échantillonnage en temps de  $\frac{1}{2}$ , en espace de  $\frac{1}{5}$

en espace reste inchangé. Comme dans le cas des observations parfaites, il est possible de sous-échantillonner les observations sans pour autant baisser significativement en précision.

FIG. 3.7 – *Erreur RMS: observations bruitées, aucun échantillonnage*FIG. 3.8 – *Erreur RMS: observations bruitées, échantillonnage en temps de  $\frac{1}{2}$ , en espace de  $\frac{1}{5}$*

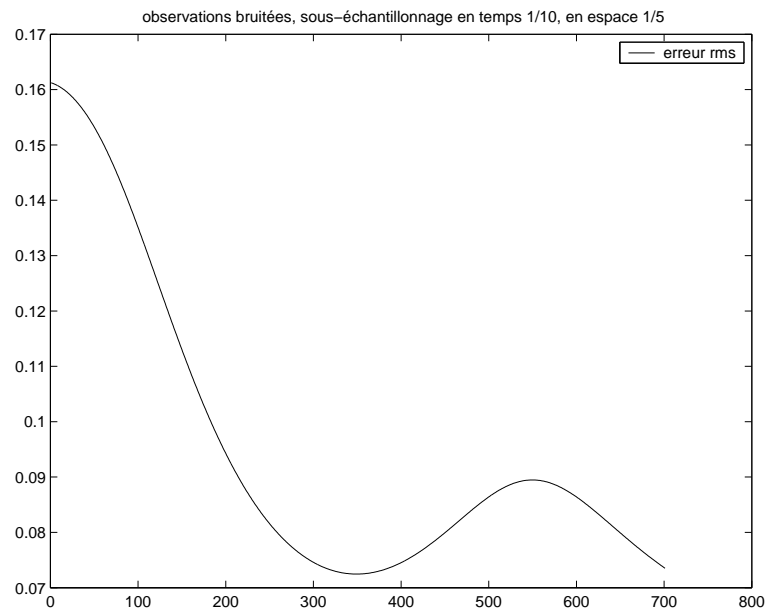


FIG. 3.9 – Erreur RMS: observations bruitées, échantillonnage en temps de  $\frac{1}{10}$ , en espace de  $\frac{1}{5}$

### 3.5 Assimilation de plusieurs fenêtres consécutives

Nous allons étudier ici la méthode sur plusieurs fenêtres afin d'observer le comportement du transport de la base via la dynamique du modèle et ainsi tester l'intérêt de la réactualisation de la matrice de covariance d'erreur d'ébauche en comparaison avec un 4D-var réduit.

#### 3.5.1 Comportement de l'hybridation

L'intérêt de l'hybridation consiste à utiliser une matrice de covariance d'erreur d'ébauche qui évolue avec le système afin d'être le plus proche possible de la dynamique du modèle et ainsi de représenter au mieux la variabilité de celui-ci, le but ultime étant d'obtenir une meilleure correction lors de l'assimilation. Nous allons donc comparer dans ce cas simple les performances de l'hybridation et d'un 4D-var réduit.

La configuration choisie est une discrétisation en temps de  $\frac{1}{10}$  et en espace de  $\frac{1}{5}$ . Les observations sont bruitées. Le bruit est le même que celui introduit précédemment. L'assimilation va opérer sur quatre fenêtres de longueur deux secondes.

La matrice de covariance d'erreur d'ébauche, dans le cas du 4D-var réduit, est obtenue via une analyse EOF lors de l'initialisation: la réduction d'ordre opérée est la même que dans le cadre de l'hybridation (même nombre de vecteurs propres conservés).

La figure 3.10 représente l'erreur RMS des deux méthodes.

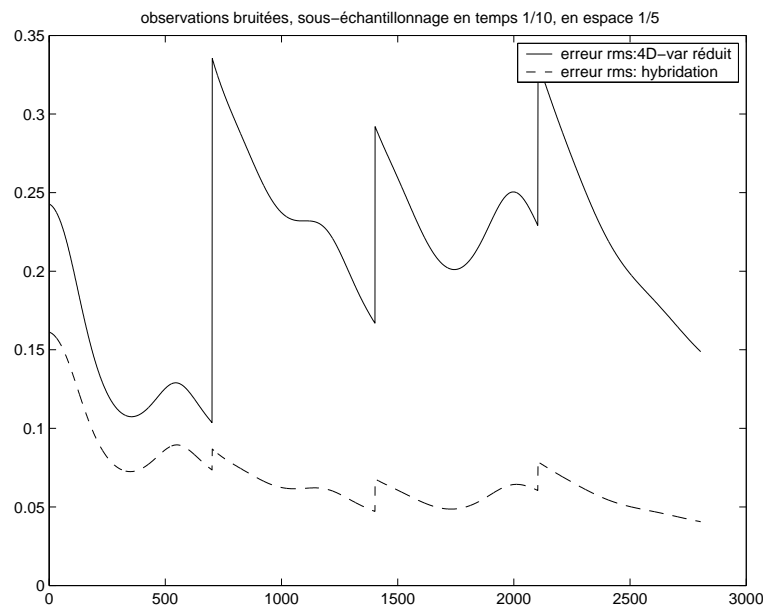


FIG. 3.10 – Erreur RMS de l'hybridation et du 4D-var réduit

Nous constatons ainsi que l'hybridation permet d'obtenir une erreur faible. De plus, cette erreur est constamment inférieure à celle produite par un 4D-var réduit, l'écart entre les deux courbes RMS augmentant particulièrement après la première fenêtre. Ainsi, la covariance d'erreur d'ébauche du 4D-var réduit ne se trouve plus en adéquation avec la variabilité du système,

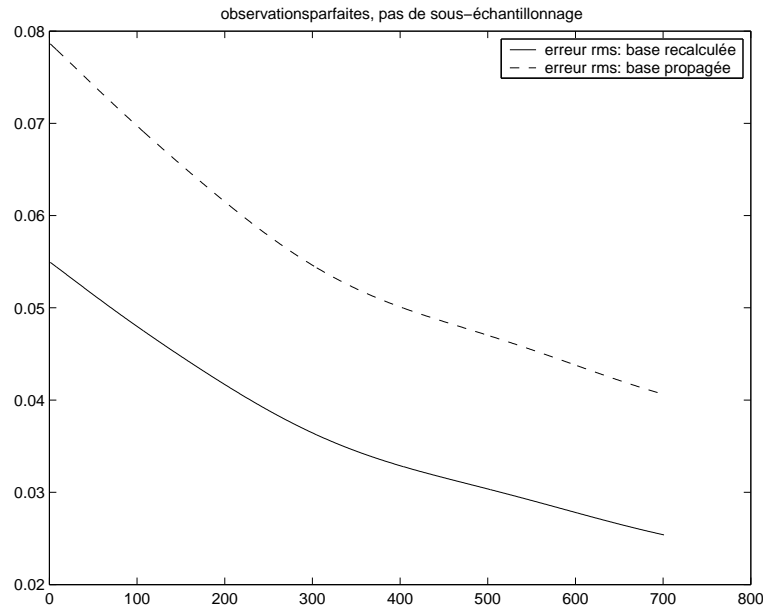


FIG. 3.11 – Erreur RMS sur la dernière fenêtre: base recalculée VS base propagée

d'où une augmentation significative de l'erreur, ce qui n'est pas le cas de l'hybridation, grâce à la propagation de la base EOF suivant la dynamique du modèle.

Ceci est confirmé par l'expérience suivante. La base EOF calculée lors de l'initialisation est propagée sur les trois premières fenêtres. Puis cette base est recalculée depuis la trajectoire obtenue sur la troisième fenêtre. La figure 3.11 permet de comparer l'erreur provenant de l'assimilation avec cette nouvelle base et celle provenant avec la base propagée une quatrième fois. L'hybridation semble moins performante, néanmoins la forme des deux courbes est similaire. Ceci laisse penser que la matrice de covariance d'erreur d'ébauche est en adéquation avec la variabilité du système. Malgré la diffusion due au modèle, la base EOF propagée reste pertinente.

### 3.5.2 Étude de la propagation des EOFs

Pour mieux comprendre les résultats précédents, il est nécessaire de voir comment se comporte les différentes EOFs au cours de l'assimilation.

Les figures 3.12, 3.13, 3.14 et 3.15 représentent l'évolution des trois principales composantes EOF sur les différentes fenêtres d'assimilation.

On remarque, de plus, que la prépondérance des trois premiers modes par rapport aux cinq autres diminue, mais conserve l'ordre établi à l'initialisation. La première EOF est ainsi toujours dominante, même si son importance tend à diminuer. Ce résultat s'explique par le fait que le modèle est linéaire: la variabilité du système reste concentrée sur les mêmes modes principaux.

Les modes principaux suivent bien la dynamique du modèle: un transport vers la droite et une diffusion. De fait, ils restent représentatifs de la variabilité.

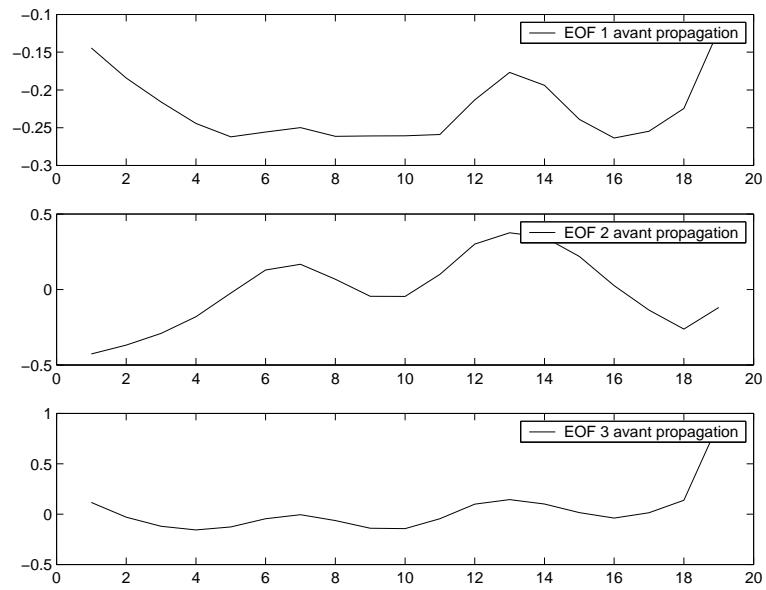


FIG. 3.12 – Trois premières EOFs avant propagation

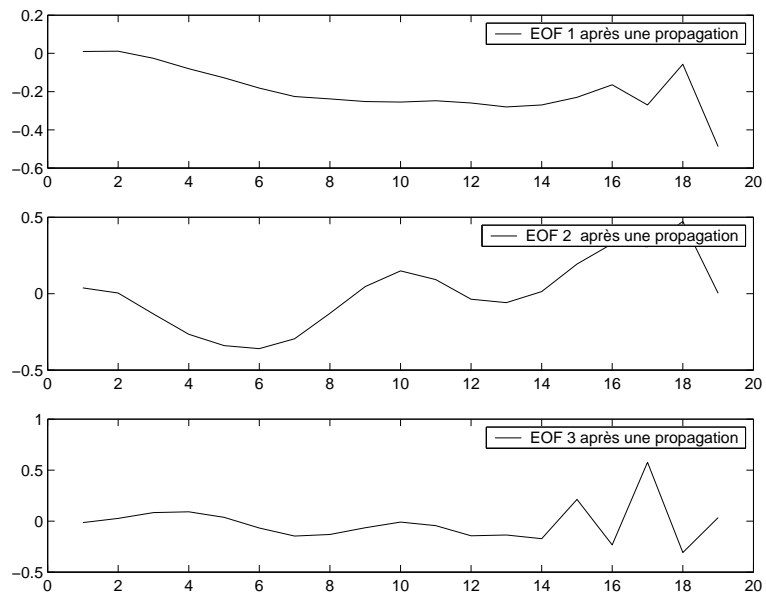


FIG. 3.13 – Trois premières EOFs après une propagation



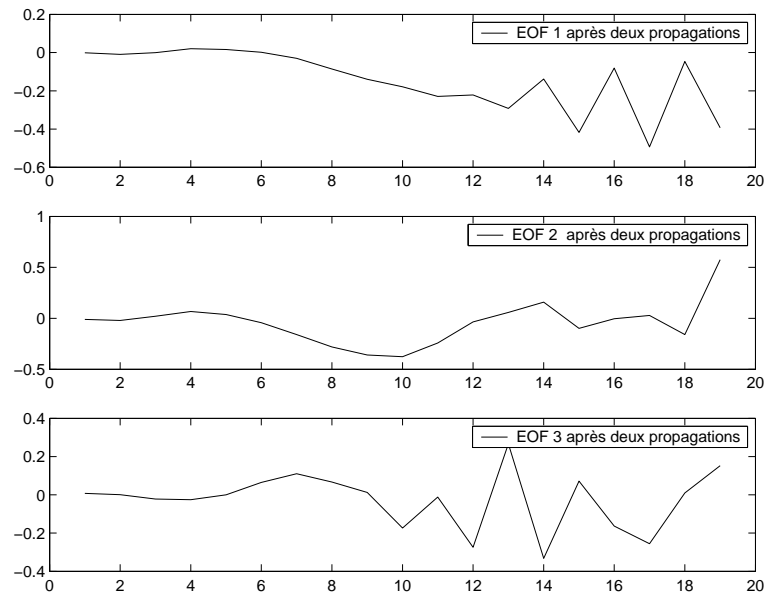


FIG. 3.14 – Trois premières EOFs après deux propagations

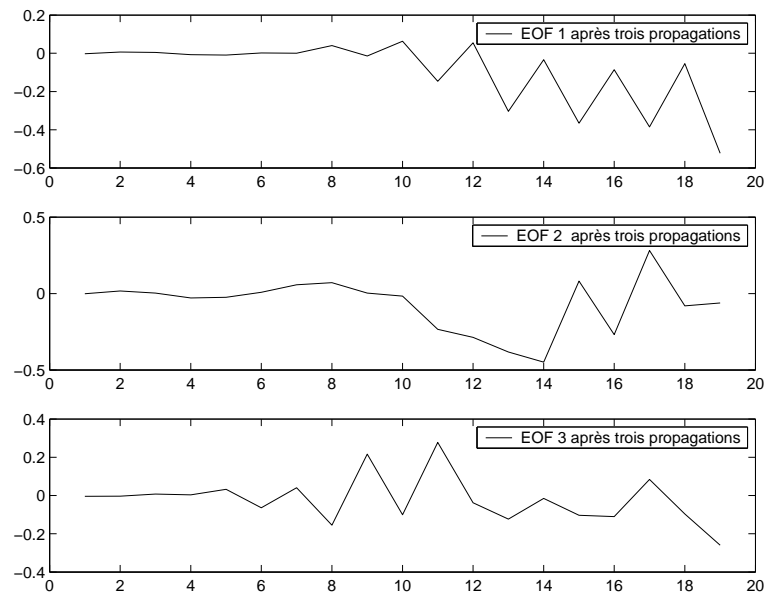


FIG. 3.15 – Trois premières EOFs après trois propagations

## Chapitre 4

# Expérimentation dans le cas d'un modèle non-linéaire

Nous avons vu précédemment que dans le cas d'un modèle linéaire, l'hybridation apparaissait comme défailante en comparaison d'une approche 4D-var réduit. Le but de cette partie est d'étudier l'hybridation sur un modèle non-linéaire, générateur d'une plus grande variabilité pour le système.

### 4.1 Le modèle

Nous allons expérimenter dans cette partie l'hybridation dans un cas simple de non-linéarité: l'équation de Burger 1-D. Le modèle est le suivant:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} - \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = g & x \in ]0, 1[, t > 0 \\ u(0, t) = u(1, t) = 0 & t \geq 0 \\ u(x, 0) = k \sin \pi x \sin \pi(1 - x) & x \in ]0, 1[ \end{cases} \quad (4.1)$$

Afin de pouvoir étudier finement le comportement de la méthode, nous allons nous placer à nouveau dans le cas où nous connaissons parfaitement la solution exacte. On choisit  $u = k \sin \pi x(t+1) \sin \pi(1-x)(t+1)$ , avec  $k = 0.1$ . Le second membre vaut alors

$$\begin{aligned} g(x, t) = & \pi k [x + k(t+1) \sin \pi(1-x)(t+1)] \cos \pi x(t+1) \sin \pi(1-x)(t+1) \\ & + \pi k [1-x - k(t+1) \sin \pi x(t+1)] \sin \pi x(t+1) \cos \pi(1-x)(t+1) \\ & + 2\nu k^2 \pi^2 (t+1)^2 [\sin \pi x(t+1) \sin \pi(1-x)(t+1) + \cos \pi x(t+1) \cos \pi(1-x)(t+1)] \end{aligned} \quad (4.2)$$

Là encore, seules des expériences jumelles sont réalisées.

### Calcul du linéaire tangent

Ayant  $u = u_0 + \bar{u}$ , le modèle linéaire tangent s'écrit alors:

$$\begin{cases} \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} - \nu \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} = 0 & x \in ]0, 1[, t > 0 \\ \bar{u}(0, t) = \bar{u}(1, t) = 0 \\ \bar{u}(x, 0) = h \end{cases} \quad (4.3)$$

## 4.2 Discrétisation

### Modèle non-linéaire

On discrétise en temps par un schéma d'Euler et en espace par un schéma centré d'ordre 2:

$$\frac{1}{\Delta t}(u_i^{n+1} - u_i^n) + \frac{u_i^n}{2\Delta x}(u_{i+1}^n - u_{i-1}^n) - \frac{\nu}{(\Delta x)^2}(u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n) = g(i\Delta x, n\Delta t) \quad (4.4)$$

pour  $i = 1, \dots, I-1$  et  $n = 0, \dots, N-1$ , avec  $u_i^0 = \sin i\pi\Delta x \sin i\pi(1-\Delta x)$  et  $u_0^n = u_I^n = 0$ .

Les conditions de stabilité de ce schéma sont:  $\nu \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \leq \frac{1}{2}$  et  $\Delta t \leq \frac{2\nu}{|\mathbf{u}|_\infty}$ .

Avec un pas de temps de  $\frac{1}{700}$  et une grille spatiale de 21 points, on prendra  $\nu = 0.1$ .

### Modèle linéaire tangent

De la même manière, la discrétisation donne:

$$\frac{1}{\Delta t}(\bar{u}_i^{n+1} - \bar{u}_i^n) + \frac{u_i^n}{2\Delta x}(\bar{u}_{i+1}^n - \bar{u}_{i-1}^n) + \frac{\bar{u}_i^n}{2\Delta x}(\bar{u}_{i+1}^n - \bar{u}_{i-1}^n) - \frac{\nu}{(\Delta x)^2}(\bar{u}_{i+1}^n - 2\bar{u}_i^n + \bar{u}_{i-1}^n) = 0 \quad (4.5)$$

Le modèle adjoint devient alors:

$$\begin{cases} \mathbf{p}_n = \mathbf{p}_{n+1} + \Delta t \mathbf{A}_n^T \mathbf{p}_{n+1} + \mathbf{H}_n^T \mathbf{R}_n^{-1} (\mathbf{H}_n \mathbf{X}_n - \mathbf{Y}_n) \\ \mathbf{p}_N = \mathbf{H}_N^T \mathbf{R}_N^{-1} (\mathbf{H}_N \mathbf{X}_N - \mathbf{Y}_N) \end{cases} \quad (4.6)$$

avec  $\mathbf{A}_n$  définie par:

$$A = \begin{pmatrix} b_1 & c_1 & 0 & \dots & 0 \\ a_2 + b_2 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & c_{E-1} \\ 0 & \dots & 0 & a_E & b_E \end{pmatrix} \quad (4.7)$$

et

$$\begin{aligned} a_i &= \frac{\nu}{\Delta x^2} + \frac{1}{2\Delta x} u_i^n \\ b_i &= 1 - \frac{1}{2\Delta x} (u_{i+1}^n - u_{i-1}^n) - \frac{2\nu}{\Delta x^2} \\ c_i &= \frac{\nu}{\Delta x^2} - \frac{1}{2\Delta x} u_i^n \end{aligned} \quad (4.8)$$

## 4.3 Analyse EOF

Les figures 4.1, 4.2 et 4.3 représentent les trois premiers vecteurs propres associés aux trois valeurs propres les plus significatives. La figure 4.4 montrent les huit premières valeurs propres.

Comme pour le cadre linéaire, quelques modes seulement sont représentatifs de la variabilité du système.

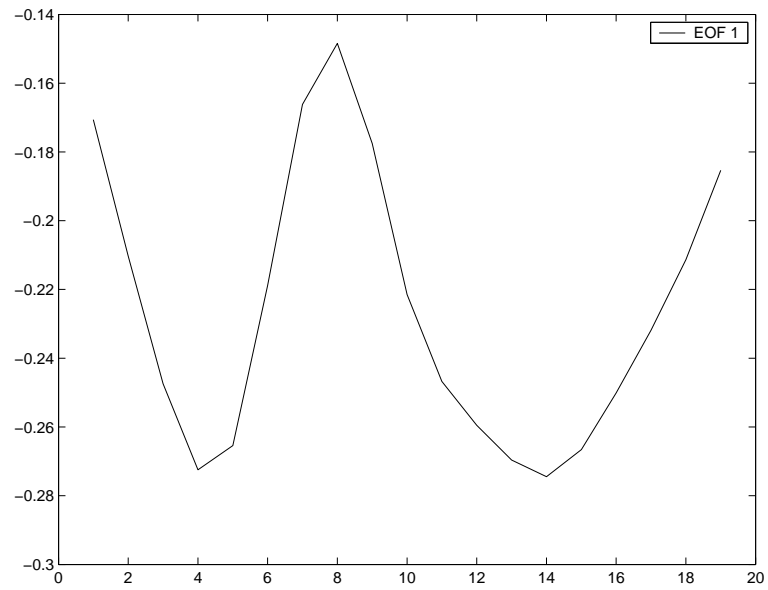


FIG. 4.1 – *Premier vecteur propre*

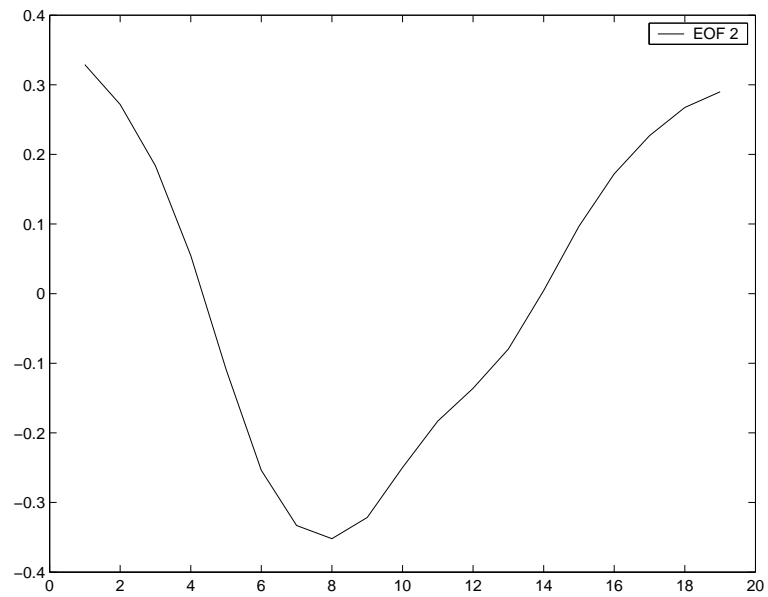


FIG. 4.2 – *Second vecteur propre*

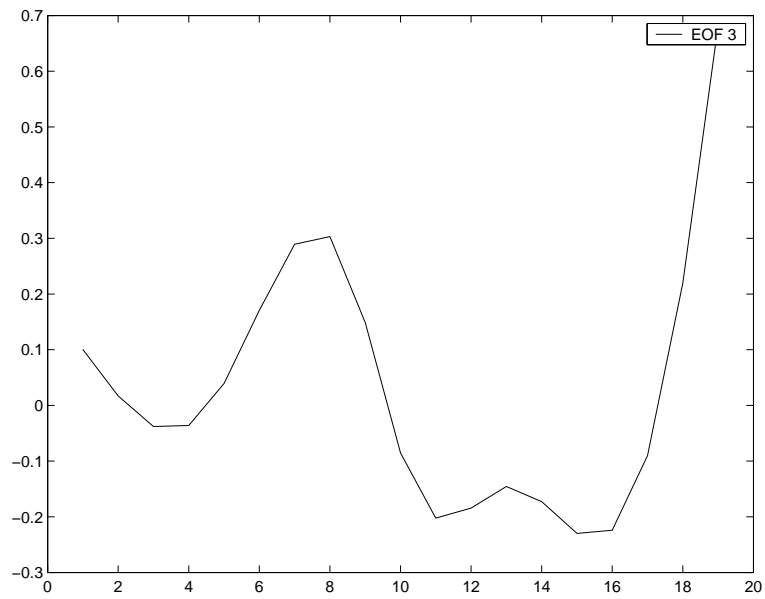


FIG. 4.3 – Troisième vecteur propre

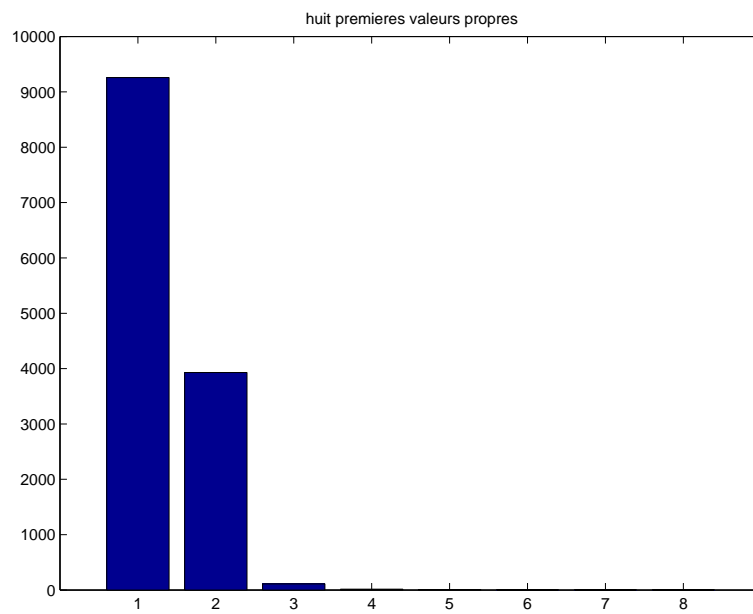


FIG. 4.4 – Huit plus grandes valeurs propres

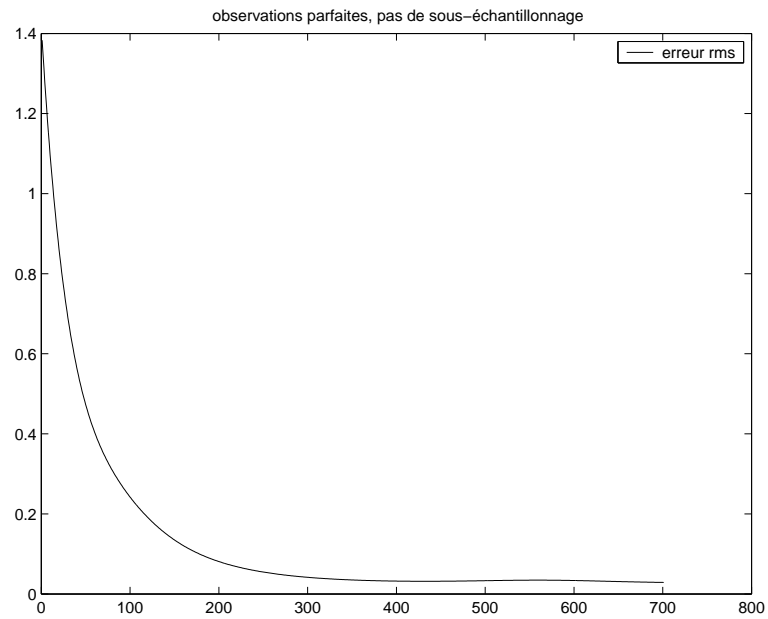


FIG. 4.5 – *Erreur RMS: observations parfaites, pas d'échantillonnage*

## 4.4 Premiers résultats sur une fenêtre d'assimilation

### Observations parfaites

Les figures 4.5 et 4.6 montrent que l'influence d'un faible échantillonnage reste faible sur la correction apportée par l'assimilation.

### Observations bruitées

Les figures 4.7, 4.8 et 4.9 représentent l'erreur RMS lorsque les observations sont bruitées et que l'on échantillonne en temps et en espace. Comme dans le cadre d'observations parfaites, l'hybridation permet de tels échantillonnages.

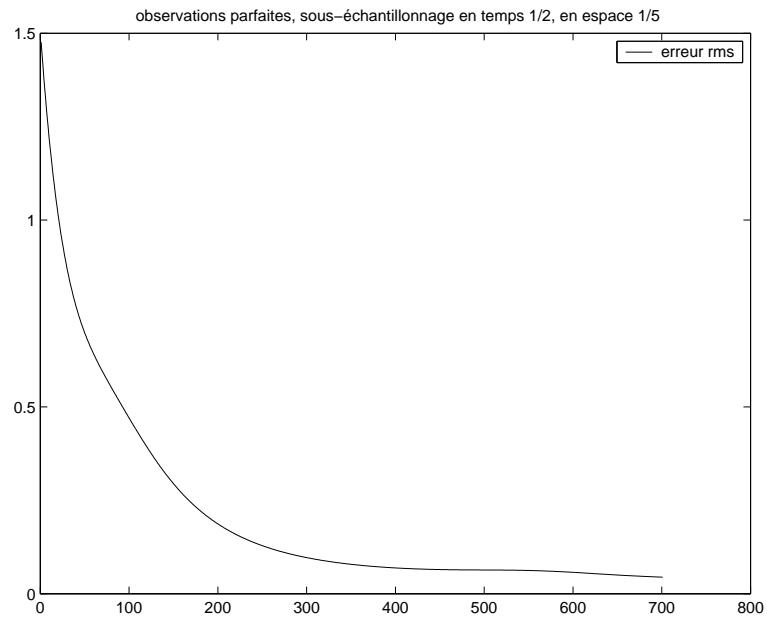


FIG. 4.6 – Erreur RMS: observations parfaites, échantillonnage en temps de  $\frac{1}{2}$ , en espace de  $\frac{1}{5}$

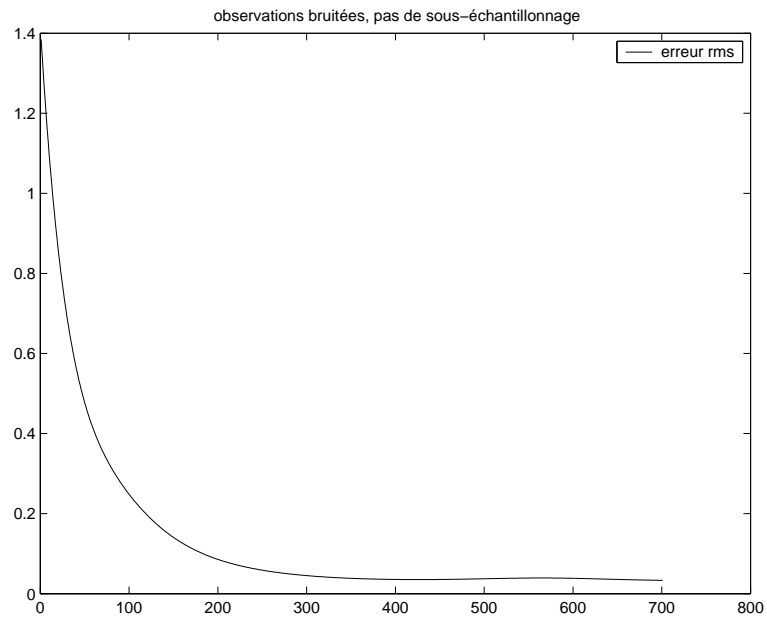


FIG. 4.7 – Erreur RMS: observations bruitées, pas d'échantillonnage

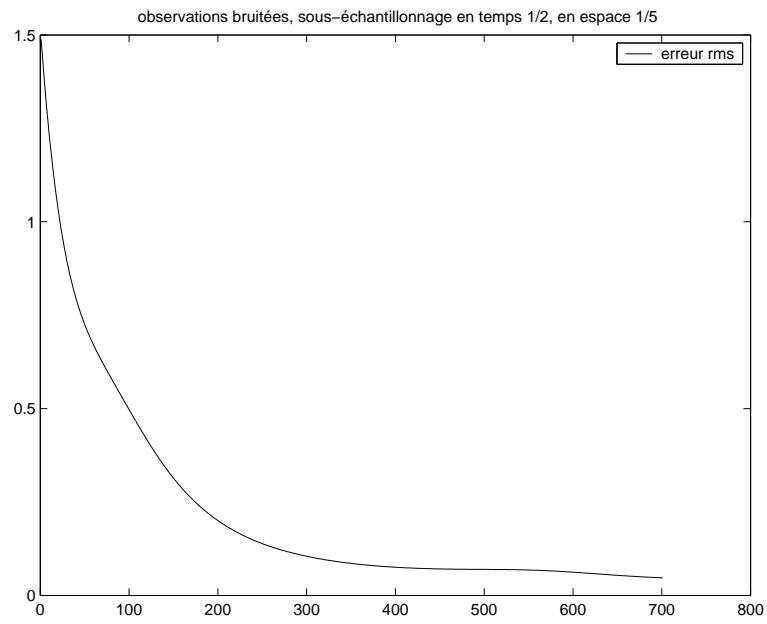


FIG. 4.8 – Erreur RMS: observations bruitées, échantillonnage en temps de  $\frac{1}{2}$ , en espace de  $\frac{1}{5}$

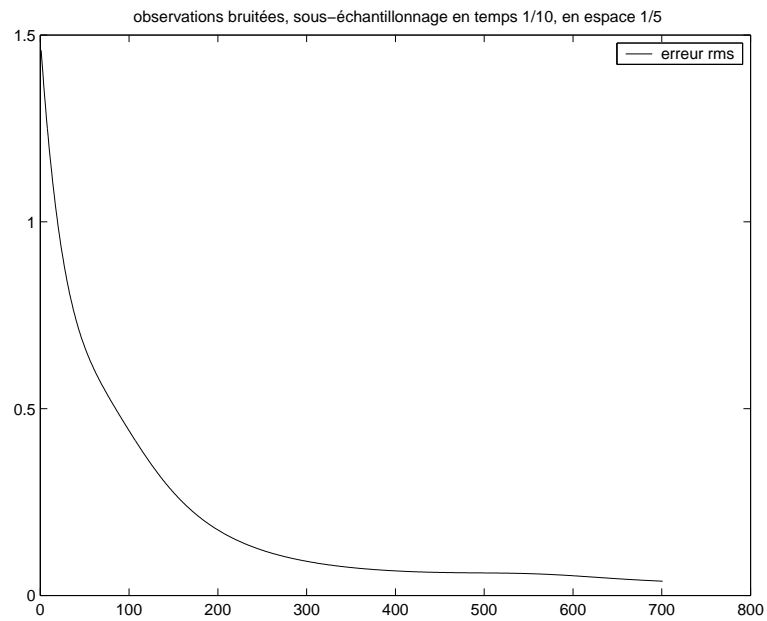


FIG. 4.9 – Erreur RMS: observations bruitées, échantillonnage en temps de  $\frac{1}{10}$ , en espace de  $\frac{1}{5}$



## 4.5 Assimilation de plusieurs fenêtres consécutives

Comme pour le cas du modèle linéaire, nous allons nous intéresser dans cette partie aux performances de l'hybridation comparées à celles d'un 4D-var réduit, ou celles d'un 4D-var où l'on recalculerait les EOFs sur chaque fenêtre. Le but étant de voir, si oui ou non, l'hybridation améliore la correction lors de l'assimilation.

### 4.5.1 Comportement de l'hybridation

La configuration choisie est, là encore, une discrétisation en temps de  $\frac{1}{10}$  et en espace de  $\frac{1}{2}$ . Les observations sont bruitées, ce bruit suivant une loi normale de moyenne nulle et de variance  $3 \cdot 10^{-2}$ .

La figure 4.10 permet de comparer l'erreur engendrée par l'hybridation et un 4D-var réduit sur les différentes fenêtres.

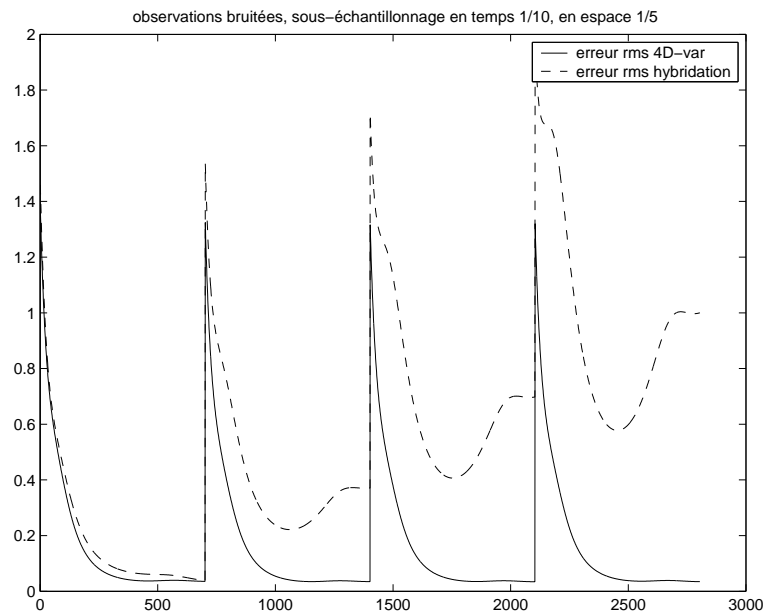


FIG. 4.10 – Erreur RMS de l'hybridation et du 4D-var réduit

Les performances des deux algorithmes sont du même ordre sur la première fenêtre, puis le 4D-var obtient de meilleurs résultats lors des différentes phases assimilées ensuite. Il semble donc que le fait de propager la base EOF entraîne une augmentation de l'erreur.

Ce résultat est confirmé par l'expérience suivante. Comparons l'erreur engendrée sur la dernière fenêtre d'assimilation lorsque la base est propagée tout le long, ou recalculée juste sur cette fenêtre. La figure 4.11 montre de nouveau que la propagation entraîne une augmentation de l'erreur.

### 4.5.2 Comportement des EOFs lors de l'assimilation

Les figures 4.12, 4.13, 4.14 et 4.15 représentent l'évolution des trois premières composantes EOFs sur les différentes fenêtres d'assimilation.

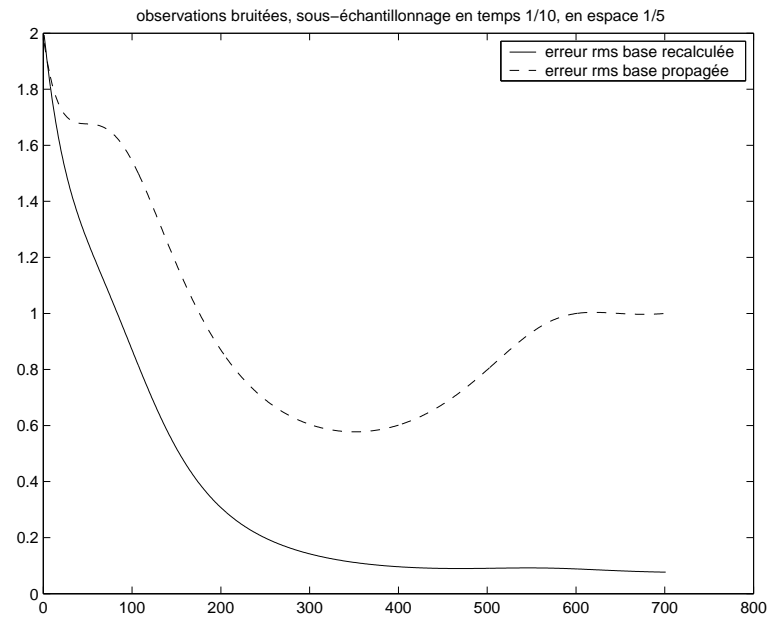


FIG. 4.11 – Erreur RMS sur la dernière fenêtre:base recalculée VS base propagée

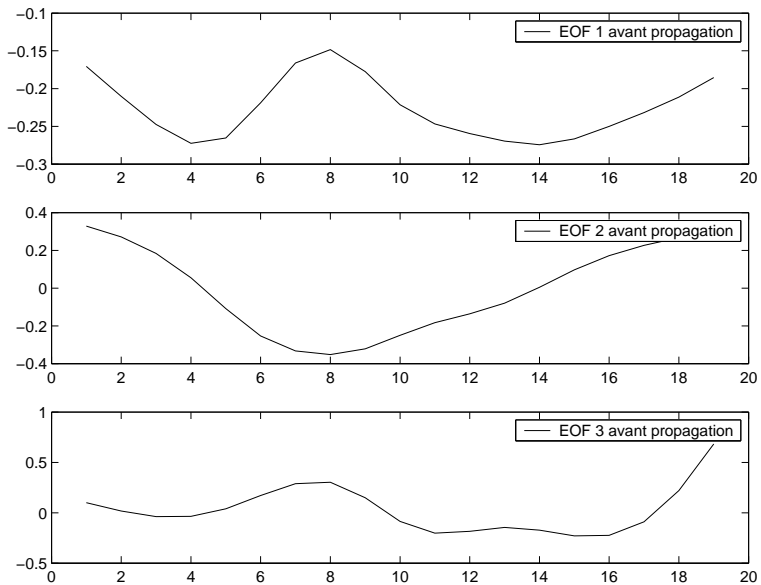


FIG. 4.12 – Trois premières EOFs avant propagation

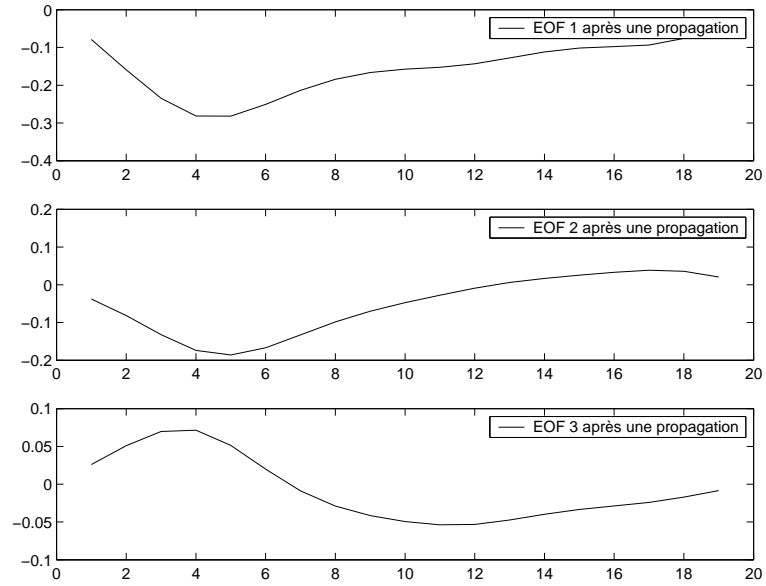


FIG. 4.13 – Trois premières EOFs après une propagation

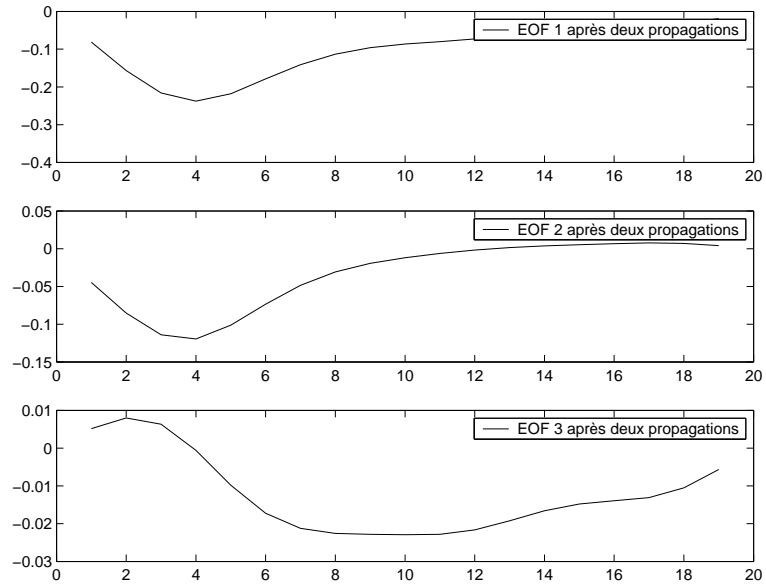
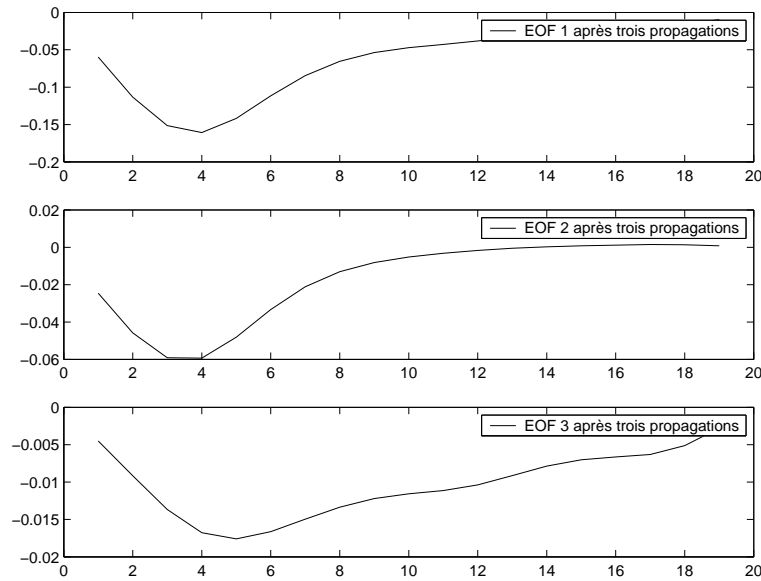


FIG. 4.14 – Trois premières EOFs après deux propagations

FIG. 4.15 – *Trois premières EOFs après trois propagations*

Après une propagation, les modes dominants sont les EOFs deux et trois. La première EOF perd ainsi son hégémonie au profit de la seconde. Puis lors des propagations suivantes les modes dominants restent inchangés. Il est dès lors pertinent de s'intéresser uniquement au cas de ces trois vecteurs. De plus, l'écart entre ces variances-covariances diminuent.

On remarque que ces vecteurs se ressemblent ou tendent à se ressembler, à une constante multiplicative près. La propagation entraîne donc une perte d'information sur la variabilité du système: on travaille en fait avec des matrices dont le rang a diminué au cours de l'assimilation. Ce phénomène s'explique de par la valeur des paramètres du modèle  $\nu$  et  $k$  qui déterminent respectivement l'importance du rôle de la diffusion et la vitesse de la solution. Dans notre cas, le terme diffusif semble trop important. Malheureusement, pour des raisons numériques concernant la convergence du schéma de discrétisation, il n'a pas été possible de trouver une meilleure configuration pour tester les performances de l'hybridation. Dans un tel cas de figure, l'hybridation devient moins performante que du 4D-var réduit (base constante ou recalculée), pour qui la matrice de covariance d'erreur d'ébauche permet de mieux faire apparaître la variabilité du système.

Il est à noter que ce type de comportement risque a priori d'être rencontré avec tout modèle. En effet, un modèle linéaire tangent n'inclut pas de terme de forçage, et donc n'injecte pas d'énergie dans le système. Si le modèle est trop diffusif, les EOFs propagées par le linéaire tangent vont donc perdre petit à petit leurs structures et donc l'information qu'elles contiennent. Une piste pour y remédier sera peut être d'utiliser le modèle complet pour le calcul d'évolution des EOFs.

## Conclusion et perspectives

Le but de ce stage était de tester l'hybridation des approches variationnelle et stochastique dans l'optique d'obtenir un algorithme d'assimilation qui soit plus performant que ceux déjà existant, et dont le coût en terme de calcul ne soit pas prohibitif.

Au vu des résultats exposés dans ce rapport, la méthode mise en oeuvre semble performante: il est possible d'assimiler des données de façon précise. Mieux, dans un cadre linéaire celle-ci apparait comme plus performante que les méthodes variationnelles les plus performantes du type 4D-var réduit. Ainsi la propagation de la base EOF permet de coller au mieux à la variabilité du système. Cependant, l'étude concernant le modèle non-linéaire nous montre les limites d'une telle méthode: dans des conditions difficiles (vitesse importante, forte diffusion,..) la propagation de la base réduite entraîne une perte d'information importante et donc une augmentation significative de l'erreur engendrée par la méthode.

De plus, seules des expériences jumelles ont été réalisées. Il serait donc intéressant de voir le comportement de l'hybridation dans un cadre plus réaliste. Ainsi dans un premier temps, dans le cadre des modèles étudiés précédemment, il serait possible de prendre pour observation la solution analytique du système différentiel (elle est connue).

Concernant les coûts de calcul, les modèles testés étant de petite taille, l'hybridation ne s'est pas avérée plus coûteuse qu'un 4d-var réduit. Néanmoins, pour des modèles réalistes, ceci peut s'avérer plus problématique malgré l'emploi de techniques de réduction d'ordre. En effet le coût de l'hybridation correspond à la somme de ceux du 4D-avr réduit et du filtre SEEK.

Enfin, un dernier axe de recherche concerne la signification des matrices de covariance d'erreur obtenues: que représentent-elles réellement? Sont-elles pertinentes? En effet, faute de temps, il n'a pas été possible de mettre en place des tests significatifs pour répondre à ces questions.

## Annexe A

# Calcul de la dérivée au sens de Gâteaux de la fonction coût $J$ du 4D-var incrémental

La fonction coût  $J$  du 4D-var incrémental est la suivante:

$$J(\delta \mathbf{x}_0) = \frac{1}{2} \delta \mathbf{x}_0^T \mathbf{B}^{-1} \delta \mathbf{x}_0 + \frac{1}{2} \sum_{i=0}^N (\mathbf{H}_i \mathbf{M}_{0,i} \delta \mathbf{x}_0 - \mathbf{d}_i)^T \mathbf{R}_i^{-1} (\mathbf{H}_i \mathbf{M}_{0,i} \delta \mathbf{x}_0 - \mathbf{d}_i) \quad (\text{A.1})$$

Comme annoncé dans le chapitre 2, cette formule est obtenue à partir du développement à l'ordre 1, autour d'un point qualifié d'ébauche, de l'opérateur d'observation et du modèle inclus dans la fonction coût provenant du 4D-var. Calculons de sa dérivée directionnelle suivant  $\mathbf{h}$ ,

$$J(\delta \mathbf{x}_0) = \frac{1}{2} \delta \mathbf{x}_0^T \mathbf{B}^{-1} \delta \mathbf{x}_0 + \frac{1}{2} \sum_{i=0}^N (H_i[M_{0,i}(\mathbf{x}_0 + \delta \mathbf{x}_0)] - \mathbf{y}_i)^T \mathbf{R}_i^{-1} (H_i[M_{0,i}(\mathbf{x}_0 + \delta \mathbf{x}_0)] - \mathbf{y}_i) \quad (\text{A.2})$$

$J$  s'écrit donc comme la somme de deux termes:

$$J(\delta \mathbf{x}_0) = J_b(\delta \mathbf{x}_0) + J_o(\delta \mathbf{x}_0) \quad (\text{A.3})$$

La dérivée directionnelle du terme  $J_b$  étant facile à obtenir, nous allons donc nous intéresser uniquement au terme lié aux observations:  $J_o$ . Supposons de plus que les opérateurs  $H_i$  soient linéaires. Posons  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \delta \mathbf{x}_0$ . Le calcul donne:

$$\begin{aligned}
 I(\alpha, \mathbf{h}) &= J_o(\mathbf{x} + \alpha \mathbf{h}) - J_o(\mathbf{x}) \\
 I(\alpha, \mathbf{h}) &= \frac{1}{2} \sum_{i=0}^N (\mathbf{H}_i M_{0,i}(\mathbf{x} + \alpha \mathbf{h}) - \mathbf{y}_i)^T \mathbf{R}_i^{-1} (\mathbf{H}_i M_{0,i}(\mathbf{x} + \alpha \mathbf{h}) - \mathbf{y}_i) \\
 &\quad - \frac{1}{2} \sum_{i=0}^N (\mathbf{H}_i M_{0,i}(\mathbf{x}) - \mathbf{y}_i)^T \mathbf{R}_i^{-1} (\mathbf{H}_i M_{0,i}(\mathbf{x}) - \mathbf{y}_i) \\
 I(\alpha, \mathbf{h}) &= \frac{1}{2} \sum_{i=0}^N (\mathbf{H}_i M_{0,i}(\mathbf{x} + \alpha \mathbf{h}) - \mathbf{y}_i)^T \mathbf{R}_i^{-1} (\mathbf{H}_i M_{0,i}(\mathbf{x} + \alpha \mathbf{h}) - \mathbf{y}_i) \\
 &\quad - \frac{1}{2} \sum_{i=0}^N (\mathbf{H}_i M_{0,i}(\mathbf{x}) - \mathbf{y}_i)^T \mathbf{R}_i^{-1} (\mathbf{H}_i M_{0,i}(\mathbf{x} + \alpha \mathbf{h}) - \mathbf{y}_i) \\
 &\quad + \frac{1}{2} \sum_{i=0}^N (\mathbf{H}_i M_{0,i}(\mathbf{x}) - \mathbf{y}_i)^T \mathbf{R}_i^{-1} (\mathbf{H}_i M_{0,i}(\mathbf{x} + \alpha \mathbf{h}) - \mathbf{y}_i) \\
 &\quad - \frac{1}{2} \sum_{i=0}^N (\mathbf{H}_i M_{0,i}(\mathbf{x}) - \mathbf{y}_i)^T \mathbf{R}_i^{-1} (\mathbf{H}_i M_{0,i}(\mathbf{x}) - \mathbf{y}_i)
 \end{aligned}$$

En divisant par  $\alpha$  et en faisant tendre  $\alpha$  vers 0 il vient:

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{1}{\alpha} I(\alpha, \mathbf{h}) = (\nabla J_o(\mathbf{x}), \mathbf{h}) \quad (\text{A.4})$$

D'où:

$$\begin{aligned}
 (\nabla J_o(\mathbf{x}), \mathbf{h}) &= \frac{1}{2} \sum_{i=0}^N (\mathbf{H}_i \widehat{M}_{0,i}(\mathbf{x}), \mathbf{R}_i^{-1} (\mathbf{H}_i M_{0,i}(\mathbf{x}) - \mathbf{y}_i)) \\
 &\quad + \frac{1}{2} \sum_{i=0}^N (\mathbf{H}_i M_{0,i}(\mathbf{x}) - \mathbf{y}_i, \mathbf{R}_i^{-1} (\mathbf{H}_i \widehat{M}_{0,i}(\mathbf{x})))
 \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

Posons alors  $\mathbf{x}_i = M_{0,i}(\mathbf{x})$ ,  $\widehat{\mathbf{x}}_i = \widehat{M}_{0,i}(\mathbf{x})$

D'où:

$$\nabla J_o(\mathbf{x}) = \sum_{i=0}^N \mathbf{H}_i^T \mathbf{R}_i^{-1} (\mathbf{H}_i \mathbf{x}_i - \mathbf{y}_i) \quad (\text{A.6})$$

# Bibliographie

- [1] E. BLAYO, J. BLUM, and J. VERRON. Assimilation variationnelle de données en océanographie et réduction de la dimension de l'espace de contrôle. *Equations aux Dérivées Partielles et Applications*, pages 199–219, 1998.
- [2] S. DURBIANO. *Vecteurs caractéristiques de modèles océaniques pour la réduction d'ordre en assimilation de données*. PhD thesis, Université Joseph Fourier, Grenoble I, 2001.
- [3] F.X. LE DIMET and J. BLUM. Assimilation de données pour les fluides géophysiques. Number 67 in *Matapli*, Janvier 2002.
- [4] L. PARENT. *Assimilation de données dans l'océan Pacifique Tropical sur la période 1994-1998*. PhD thesis, Université Joseph Fourier, Grenoble I, 2000.
- [5] F. RABIER and Z. LIU. Variational Data Assimilation: Theory and Overview. In ECMRWF, editor, *Seminar on Recent developments in data assimilation for atmosphere and ocean*, Seminar Proceedings, pages 29–43, September 2003.
- [6] S. RICCI. *Modélisation multivariée de la matrice de covariance d'erreur d'ébauche pour l'assimilation variationnelle océanique*. PhD thesis, Université Paul Sabatier, Toulouse III.
- [7] C. ROBERT, S. DURBIANO, E. BLAYO, and J. VERRON. A reduced-order strategy for 4d-var data assimilation. *JMS*, submitted June 2004.
- [8] C.H. TESTUT. *Assimilation de données satellitales avec un filtre de Kalman de rang réduit dans un modèle aux Equations Primitives de l'océan Atlantique*. PhD thesis, Université Joseph Fourier, Grenoble I, 2000.
- [9] F. VEERSÉ, D.T. PHAM, and J. VERRON. 4d-var/seek: a consistent hybrid variational-smoothing data assimilation method. Number 3902 in *Rapport de Recherche*, March 2000.
- [10] A. VIDARD. *Assimilation de données avec contrôle de l'erreur de modèle*. Rapport de stage de DEA, Université Joseph Fourier, Grenoble I, 1998.
- [11] A. VIDARD. *Vers une prise en compte des erreurs modèle en assimilation de données 4D-variationnelle. Application à un modèle réaliste d'océan*. PhD thesis, Université Joseph Fourier, Grenoble I, 2001.